

モンテカルロシミュレーションを用いた 超弦理論と M 理論の研究

高エネルギー加速器研究機構¹
花田政範

Abstract

素核宇宙融合レクチャーシリーズの第六回として、非専門家向けにモンテカルロシミュレーションを用いた超弦理論と M 理論の研究の概要を解説します。

¹現所属: 京都大学基礎物理学研究所、京都大学白眉センター

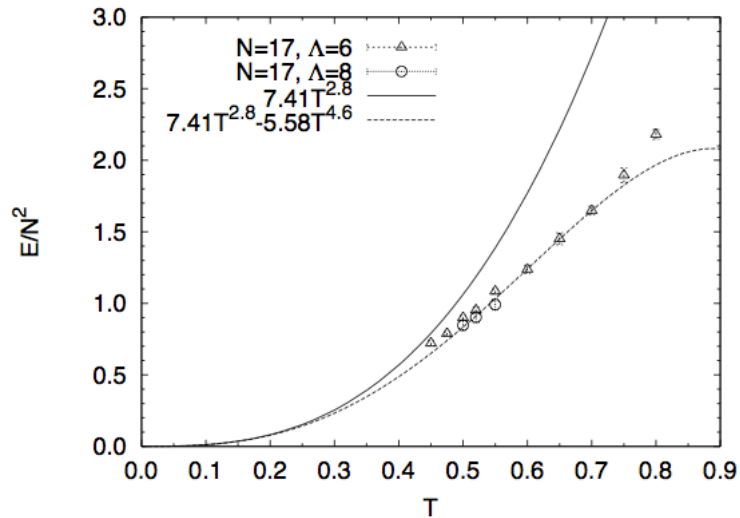


図 1: 超対称行列量子力学とブラックホールのエネルギーの比較。([1] より転載。)

1 はじめに

これから 90 分の講義を 4 回行います。非専門家向けですので、技術的な詳細は出来るだけ避けて、この分野の研究の大雑把な雰囲気を感じてもらいたいことを目標にします。具体的には、図 1 のようなプロットからどのような物理が読み取れるのかを分かってもらいたいと思います。これは、有限温度の超対称行列量子力学（時間 1 次元、空間 0 次元の超対称ヤンミルズ理論）のエネルギーをモンテカルロシミュレーションで計算し、超重力理論（超弦理論の低エネルギー有効理論）から解析的に計算されるブラックホールの質量（実線）と比較したものです。低温で超対称量子力学の結果が超重力理論の結果に漸近していくのが見て取れます。これはマルダセナ (J. Maldacena) の提唱したゲージ/重力対応から予言される性質です。ゲージ/重力対応に依れば、超対称量子力学と超重力理論のわずかなズレが超弦理論の重要な性質を表しています。この微小なズレは、超弦理論から直接計算するのは大変ですが、超対称量子力学の側ではシミュレーションで詳細に調べる事が出来ます。従って、超弦理論の理解を深めていくためには、数値シミュレーションを専門にしている皆さんの協力が必要になります。

この講義で説明する内容は以下の通りです。

- ゲージ/重力対応とは
- 超対称ゲージ理論のシミュレーション
- ABJM 理論と M 理論



図 2: 閉弦 (左) と開弦 (右)。

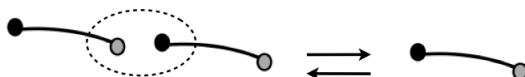


図 3: 開弦の相互作用。二本の開弦の左端 (基本表現) と右端 (反基本表現) が貼り付いて一本の弦になる。逆に、一本の弦が途中で切れて二本の弦になる事も可能。

2 ゲージ/重力対応とは

2.1 超弦理論の摂動論

ゲージ/重力対応の説明のための準備として、摂動論的な超弦理論を簡単におさらいしましょう。超弦理論では、点粒子を空間一次元の広がりを持った弦に格上げします。弦の振動モードはそれぞれが粒子に対応すると思えます。振動が激しいほど、エネルギーが大きく、従って重い粒子になります。

弦には閉弦と開弦の二種類があります (図 2)。閉弦というのはその名の通り閉じた弦で、質量ゼロの粒子として重力子やディラトンと呼ばれるスカラー場、各種のテンソル場を含みます。開弦というのは「開いた弦」で、両端にゲージ群のカラーの自由度を持たせる事が出来ます。 $U(N)$ のカラーの自由度が両端に載っていると思うと、開弦が切れたりくっついたりできるためには片方の端 (黒) には基本表現、もう片方 (灰色) には反基本表現が載っていると思えば良い事が分かります (図 3)。従って、開弦は自然にゲージ場を記述できます。この他にも、フェルミオン場やプランク質量程度の重い粒子も閉弦と開弦の振動の自由度に含まれています。

図 4 には二本の閉弦が散乱する様子が描かれています。左から二つの閉弦が飛んできて、時間とともに右に動いていくと思って下さい。弦の軌跡が描く二次元の曲面を「世界面」と呼びます。超弦理論では、弦の散乱振幅の計算ルールが与えられていて、始状態と終状態を与えれば、そのような散乱がどの程度の確率で起こるかが計算できます。ただ、始状態と終状態は同じでも、途中の状態は一意的には決まりません。図 4 の右側のように、入ってきた閉弦が一旦中間状態の二本の閉弦になり、それがもう一度相互作用して終状態に移る場合もあります。この時、世界面には浮き輪のような穴が一つあきます。中間状態でもっと複雑な相互作用が起きると、もっと沢山の穴がある世界面が現れます。穴が一つ増える度に相互作用の回数が一回増えるので、相互作用が小さければ、穴の数が少ない世界面から順番に計算していけば良いことが分かります²。このように、穴の数が多い

²開弦も考慮すると、例えば図 5 に示した閉弦 → 開弦 → 閉弦という過程のように、世界面に境界 (開弦の端点の軌跡) が出来ます。

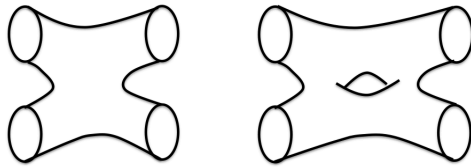


図 4: 閉弦の散乱

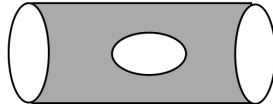


図 5: 閉弦 → 開弦 → 閉弦。世界面に境界（開弦の端点の軌跡）が出来る。（分かり易いように、世界面を灰色で表しました。）

世界面を順番に小さな摂動として取込んでゆくことが出来るという意味で、超弦理論には摂動論的な定義が与えられています。

超弦理論を矛盾無く定式化するためには時間 1 次元、空間 9 次元の 10 次元時空を考える必要があります、我々の住む 4 次元の時空と関連づけるためには余分な 6 次元をコンパクト化したりして見えなくする必要があります。今回の講義では、特に断らない限り、コンパクト化されていない 10 次元の時空を考えます³。摂動論的な超弦理論にはいくつかの種類がありますが、以下では IIA 型、IIB 型と呼ばれる超弦理論を考えます。これらの理論に現れる質量ゼロのボソン場には NS-NS、R-R と呼ばれる二つのタイプがあります⁴。NS-NS 場には重力子 $G_{\mu\nu}$ 、二階反対称テンソル場 $B_{\mu\nu}$ とディラトンと呼ばれるスカラー場 ϕ があります。これらは IIA でも IIB でも同じです。ディラトン場の期待値は、弦の散乱振幅をループの数で分類する時の結合定数 g_s と $g_s = e^\phi$ という関係にあり、弦の量子論的な効果の強さと密接に関連しています。R-R 場は k 階反対称テンソル場 $C_{\mu_1 \dots \mu_k}^{(k)}$ で、IIA では $k = 1, 3$ 、IIB では $k = 0, 2, 4$ です。

	IIA 型超弦理論	IIB 型超弦理論
NS – NS 場	$G_{\mu\nu}, B_{\mu\nu}, \phi$	$G_{\mu\nu}, B_{\mu\nu}, \phi$
R – R 場	$C_\mu^{(1)}, C_{\mu\nu\rho}^{(3)}$	$C^{(0)}, C_{\mu\nu}^{(2)}, C_{\mu\nu\rho\sigma}^{(4)}$

これ以上の詳細は今回の講義には必要がないので省略しますが、興味があれば教科書 [2, 3] を参照して下さい。

超弦理論にはプランク質量程度の重い粒子も登場すると言いましたが、そのような粒子は我々の住んでいる低エネルギーの世界では直接見る事は出来ません。そこで、このような自由度は積分してしまい、軽い粒子だけを用いて低エネルギー相互作用を考えましょう。（具体的には、超弦理論から計算された軽い粒子の散乱振幅を再現するように有効作用を決定します。）そのようにして得られ

³というわけで、まだ「この世」ではありません。ごめんなさい。

⁴NS は Neveu(ヌボー)-Schwarz(シュバルツ)、R は Ramond(ラモン) の略で、いずれも人名です。

るのが超重力理論です。IIA 型、IIB 型の超弦理論から得られる超重力理論もそれぞれ IIA 型、IIB 型の超重力理論と呼ばれています。超重力理論は一般相対性理論を 10 次元の時空に拡張し、超対称性を導入したものになっています。

2.2 ブラックブレンと D ブレン

超重力理論は一般相対論の自然な拡張になっているので、古典解としてブラックホールが存在します。IIA 型超弦理論では R-R 場の電荷を持ったブラックホールが存在し、ブラック 0 ブレンと呼ばれます⁵。ブラック 0 ブレンは超弦理論の持つ超対称性を半分（スーパーチャージ 16 個分）保ちます。この他にも、空間方向の p 次元に広がったブラック p ブレンというブラック 0 ブレンの親戚が存在します⁶。ここで p は IIA 型超重力では偶数、IIB 型超重力では奇数です。これは R-R 場が IIA 型では奇数階、IIB 型では偶数階のテンソルであることに対応しており、ブラック p ブレンは $C^{\mu_1 \dots \mu_{p+1}}$ の電荷を持ちます。

ブラック p ブレンの計量は

$$ds^2 = \alpha' \left\{ \frac{U^{(7-p)/2}}{g_{YM} \sqrt{d_p N}} \left[- \left(1 - \frac{U_0^{7-p}}{U^{7-p}} \right) dt^2 + dy_{\parallel}^2 \right] + \frac{g_{YM} \sqrt{d_p N}}{U^{(7-p)/2} \left(1 - \frac{U_0^{7-p}}{U^{7-p}} \right)} dU^2 + g_{YM} \sqrt{d_p N} U^{(p-3)/2} d\Omega_{8-p}^2 \right\}, \quad (1)$$

で与えられます [4, 5]⁷。 α' は閉弦の長さの 2 乗、 (t, y_{\parallel}) はブレンの広がっている $(p+1)$ 次元方向の座標、 U と Ω はブレンと垂直な方向の動径座標と角座標を表します。 U_0 はブラックブレンのホライゾン⁸の座標で、ブラックブレンの温度（ホーキング温度）と

$$T = \frac{(7-p)U_0^{(5-p)/2}}{4\pi \sqrt{d_p g_{YM}^2 N}} \quad (2)$$

という関係にあります。 d_p は単なる定数で、 $d_p = 2^{7-2p} \pi^{(9-3p)/2} \Gamma((7-p)/2)$ です。 $p = 3$ では $d\Omega_{8-p}^2$ の前の係数が動径 U に依らない定数になるので、ブラックブレン時空は (t, y_{\parallel}, U) で表される 5 次元時空と 5 次元球面 S^5 の直積になります。 (t, y_{\parallel}, U) で表される 5 次元は、 AdS_5 時空中のブラックホールと解釈できます。 $p \neq 3$ ではこのような綺麗な直積構造はありません。

弦理論の量子効果の大きさを表すディラトンは

$$e^{\phi} = (2\pi)^{2-p} g_{YM}^2 \left(\frac{d_p g_{YM}^2 N}{U^{7-p}} \right)^{\frac{3-p}{4}} \quad (3)$$

⁵'0' はブラックホールの空間的な広がりを表しています。ブラックホールはもちろん有限の広がりを持っていますが、遠方から見ると点状に見えます。そこで、「空間 0 次元、時間 1 次元の物体」という意味で 0 ブレンと呼びます。

⁶ $p = 2$ の時は空間 2 次元の膜 (membrane) になります。Membrane の他の次元への一般化なので 'ブレン (brane)' と呼ばれています。

⁷あとで超重力理論と超対称ヤンミルズ理論の対応を説明する時に便利のように、超対称ヤンミルズ理論の結合定数 g_{YM} とゲージ群の大きさ N を用いて計量を表しました。また、ゲージ/重力対応に必要な極限（ブレンの近傍に注目する極限）を取った後の表式を書いています。

⁸ここから先は光も逃げられない、「事象の地平線」です。

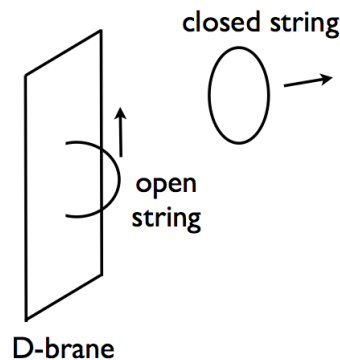


図 6: 開弦は常に D ブレーンに貼付いていなければならない。閉弦はどこにでも飛んで行ける。

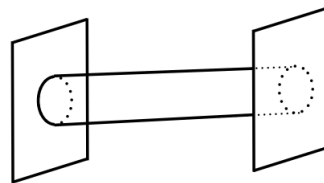


図 7: 2 枚の D ブレーンの間に伸びた開弦のループは、閉弦の交換とも解釈できる。

で与えられます。これも、 $p = 3$ では U に依らない定数になります。

ブラックブレーンは超重力理論の古典解として得られました。超重力理論は超弦理論の低エネルギー有効作用ですので、超重力理論が超弦理論の良い近似になる状況を考える限りにおいては、ブラックブレーンは超弦理論でも存在しなければなりません。では、ブラックブレーンを摂動論的な超弦理論の描像で直接記述する事は出来るでしょうか？

この問いに答えたのが、1995 年のポルチンスキー (J. Polchinski) の論文 [6] です。彼は、 D_p ブレーンという時間方向と空間 p 次元に広がった高次元の膜を考えました。D ブレーンは、開弦が端を持てる場所であるとして定義されます。即ち、開弦は D ブレーンに沿ってしか動けないとします。閉弦はどこにでも飛んでいけます。(図 6 にその気持ちを描いてみました。因みにブレーンから離れた 10 次元の時空は「バルク」と呼びます。)すると、開弦の端の境界条件は、D ブレーンと垂直な方向にはディリクレ (Dirichlet) 境界条件 (固定端) になります。これが “D” の由来です。D ブレーンに沿った方向には自由に動けるのでノイマン境界条件 (自由端) が課されます。(ノイマン境界条件は D ブレーンの登場以前から普通に用いられていたため、“N ブレーン”とは言いません。)

2 枚の D ブレーンの間に伸びた開弦を考えましょう。開弦がループを描くと、図 7 のような円筒状の世界面を描きます。このような振幅は、開弦の境界条件をきちんと考慮すれば弦理論の摂動論で記述できます。

同じ図をちょっと違う角度から眺めると、2 枚の D ブレーンが閉弦を交換して相互作用しているとも思える事が出来ます。D ブレーンがどのような状態にある閉弦を放出したり吸収したりできるか

は、開弦の描像での境界条件から分かります。すると、 D_p ブレーンは $(p+1)$ 階の R-R 場 $C_{\mu_1 \dots \mu_{p+1}}^{(p+1)}$ をやり取りできる事が分かります。即ち、 D_p ブレーンはブラック p ブレーンと同じ電荷を持っているわけです。もっと詳細に計算をすると、電荷が量子化されている事、D ブレーン 1 枚が量子化された電荷 1 つを持っている事も示す事が出来ます。また、D ブレーンはブラックブレーンと同じ超対称性を保ちます。従って、D ブレーンはブラックブレーンの超弦理論での記述を与えていると考える事が出来ます。

2.3 超対称ヤンミルズ理論と D ブレーン

超重力理論には重力子や R-R 場といった閉弦に由来する場しか登場しませんが、上で説明した D ブレーンの描像には開弦が重要な役割を果たしていました。そこで今度は D_p ブレーンの上を動く開弦を記述する低エネルギー有効作用を考えてみましょう。(振動モードはより大きな質量を持つと思って無視することにします。) まず、D ブレーンが 1 枚だけの場合を考えます。開弦は D ブレーンの広がっている $(p+1)$ 次元から離れる事が出来ないの、有効理論は $(p+1)$ の場の理論になります。質量ゼロのモードを詳しく調べると、ボソニックな場としては、 $(p+1)$ 次元のゲージ場 $A_\mu (\mu = 0, 1, \dots, p)$ と、 $9-p$ 個のスカラー場 $X_i (i = 1, \dots, 9-p)$ が存在する事が分かります。スカラー場 X_i は、開弦が D ブレーンを引っ張る事による D ブレーンの座標の揺らぎを表します。また、D ブレーンは超弦理論の持つ超対称性の半分 (16 個のスーパーチャージ) を保っているの、 A_μ と X_i のスーパーパートナーであるフェルミオン場 ψ も現れます。

次に、D ブレーンが 2 枚平行に並んでいる状況を考えましょう (図 8)。この時も、超対称性は半分保たれています。同じブレーンに端を持つ弦は質量ゼロで、D ブレーンが 1 枚だけの時と全く同じです。しかし、異なる 2 枚のブレーンをつなぐ開弦は、D ブレーン間の距離に比例した質量を持ちます。(より正確には、質量は張力 $1/\alpha'$ と D ブレーン間距離の積です。) 2×2 の行列を用いると、このような状況がちょうど実現されます。例として、 $U(2)$ のヤンミルズ理論に現れるアジョイント表現のスカラー場の運動項

$$\frac{1}{2} \int d^{p+1}x \text{Tr} (D_\mu X_i)^2 \equiv \frac{1}{2} \int d^{p+1}x \text{Tr} (\partial_\mu X_i - i[A_\mu, X_i])^2 \quad (4)$$

を考えましょう。スカラー場 X_i の対角成分を $(X_i)_{11} = x_i^{(1)}$, $(X_i)_{22} = x_i^{(2)}$ とすると、ゲージ場とスカラーの交換子からゲージ場の非対角成分 $(A_\mu)_{12}$ の「質量項」 $(x_i^{(1)} - x_i^{(2)})^2 \cdot |(A_\mu)_{12}|^2$ が現れます。 $x^{(1)}$ と $x^{(2)}$ は 1 枚目と 2 枚目の D ブレーンの座標と思えるので、 $(A_\mu)_{12}$ は D ブレーン間の距離に比例した質量を持った事になります。従って、行列の $(1, 2)$ 成分が 1 枚目の D ブレーンと 2 枚目の D ブレーンをつなぐ開弦の自由度を記述すると思えば、自然に 2 枚の D ブレーンから成る系を記述できるわけです。 X_i や ψ についても事情は同じです。もう少しきちんとした考察をすると、結局、 $U(2)$ の極大超対称ヤンミルズ理論

$$S = \frac{1}{g_{YM}^2} \int d^{p+1}x \text{Tr} \left\{ \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2} (D_\mu X_i)^2 - \frac{1}{4} [X_i, X_j]^2 + i\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu \psi + \bar{\psi}\gamma^i [X_i, \psi] \right\} \quad (5)$$

が 2 枚のブレーンの系の低エネルギー有効作用に成っている事が分かります。(極大超対称ヤンミルズ理論の詳細は Appendix B を参照して下さい。) 同様にして、D ブレーンが N 枚ある時にはゲージ群が $U(N)$ の極大超対称ヤンミルズ理論が低エネルギー有効作用になります [7]。

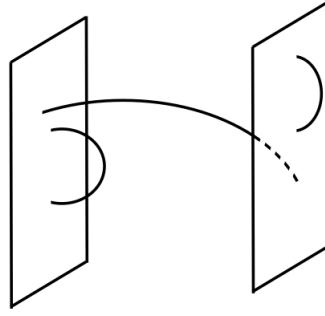


図 8: D プレーンが 2 枚ある場合。

2.4 ゲージ/重力対応

D プレーンは、極大超対称ゲージ理論でも超重力理論（あるいは摂動論的な超弦理論）のブラックブレン解でも記述できる事が分かりました。あるいは、（同じ事ですが）極大超対称ゲージ理論とブラックブレン解まわりの超弦理論は D プレーンを少し違った見方で眺めているだけだという事が分かりました。だったらこの二つは実は同じものなのではないか — こんな発想から生まれたのが「ゲージ/重力対応」[8, 9] です。これは今のところ予想に過ぎませんが、1998 年にマルダセナによって提唱されて以来いくつもの証拠が積み重ねられており、（少なくとも部分的には）正しいものであると広く信じられています。

二つの見方が同じであると言いましたが、より正確には、この二つの見方はどちらも超弦理論のある種の極限で正当化されるものになっているので、二つの見方がどちらも正当化されるようなパラメーター領域を考えなければなりません。まず、ヤンミルズ理論がいい近似になるのはどのような場合でしょうか。D プレーンは開弦とも閉弦とも相互作用しますが、ヤンミルズ理論では開弦の自由度しか考慮していないので、閉弦の自由度が落ちるような極限を考える必要があります。また、ヤンミルズ理論には開弦の振動モードは入っていないので、振動モードが無限に重くなる極限を考えなければなりません。そのためには、D プレーンが殆ど重なっている（D プレーン間の距離が $\sqrt{\alpha'}$ よりも小さい）状況で⁹、ホライゾンの極めて近く（ $\sqrt{\alpha'}$ よりも近距離）を¹⁰見れば良い事が分かります。（計量 (1) の動径座標 U は元々の動径座標を適当に規格化し直したものになっていて、 U が $O(1)$ であればこの条件が満たされています。）このような極限を取った上で、摂動論的な超弦理論の描像がいい条件を考えてみましょう。計量 (1) と閉弦のループの結合定数 (3) は、超重力理論から導かれています。従って、この解の周りでの摂動が正当化できるためには、この解の周りでの弦理論的な補正が小さくしなければなりません。そこで、計量 (1) に現れる曲率半径が $\sqrt{\alpha'}$ と比べて大きい事と、(3) が小さい事が要請されます。 $p = 3$ の場合であれば、 $g_{YM}^2 N \gg 1$ と $g_{YM}^2 \ll 1$ です。もちろん、これらの条件が満たされたからと言って、摂動論的な超弦理論の描像が正当化されるとは限りません。（我々は弦の典型的な長さスケール $\sqrt{\alpha'}$ よりも短距離の物理を考えているのです！）し

⁹短いひもを揺るのは長いひもを揺るより大変なので、短い開弦の振動モードは重くなります。

¹⁰ブレーンから遠く離れたところまで飛んで行く閉弦の長波長モードは落としてしまえ、という気分です。

かし、そこには目をつぶり、これらの条件が満たされれば摂動論的超弦理論の描像がいいと仮定しましょう。すると、このような領域では、超対称ヤンミルズ理論と超弦理論が同じものであることとなります。これが「ゲージ/重力対応」です。マルダセナは、さらに一步踏み込んで、超対称ヤンミルズ理論は超弦理論の非摂動効果も含んだ記述を与えると予想しています。

トフーフト極限 ($\lambda \equiv g_{YM}^2 N$ を固定して $N \rightarrow \infty$) では、(3) がゼロになります。従って、閉弦のループの効果が落ちて、古典的な弦理論が得られます¹¹。さらに $\lambda \rightarrow \infty$ の極限を取ると、 α' 補正も消えて、超重力理論に帰着されます。最近では、ゲージ/重力対応が α' 補正まで含めて正しい事は広く信じられているように思われます。(この講義でも、その証拠を挙げます。) しかし、ヤンミルズ理論の $1/N$ 補正と閉弦のループの効果がきちんと一致するかどうかはいまだに議論が分かれています。

$\lambda = \infty, N = \infty$	超重力理論
$\lambda = \text{有限}, N = \infty$	古典的な超弦理論
$\lambda = \text{有限}, N = \text{有限}$	量子論的な超弦理論

ゲージ/重力対応をテストするためには、ヤンミルズ理論の強結合領域を調べなければなりません。なぜならば、そこでは重力側がブラックブレン周りの摂動論的な弦理論で記述できるからです。逆に、ヤンミルズの弱結合を考えると、対応する弦理論をどう取り扱ったら良いのかが分かりません。そこで、モンテカルロシミュレーションが威力を発揮します。また、ゲージ重力対応が正しいければ、ヤンミルズ理論をシミュレーションすることで超弦理論の性質を調べる事が出来ます。

ここで注意して欲しい大事なポイントは、超弦理論の立場からは、低次元のヤンミルズ理論にも四次元理論に勝るとも劣らない物理的な興味があるということです。四次元の理論はブラック3ブレンを記述しますが、一次元(時間方向しか無い行列量子力学)でもブラック0ブレン、すなわちブラックホールが記述できてしまうのです。数値シミュレーションの立場からは、これはとても嬉しいニュースです。なぜなら、一般に、次元が高いほど数値シミュレーションのコストが大きくなってしまふからです。

3 超対称ヤンミルズ理論のシミュレーション

2章では、超対称ヤンミルズ理論をシミュレーションできれば、ゲージ/重力対応を通じて超弦理論の性質が調べられることを説明しました。この章では、具体的にどのような方法でシミュレーションをすればよいかを解説します。ヤンミルズ理論をシミュレーションする際、普通は格子正則化を用います。しかし、超対称ヤンミルズ理論の場合には、必ずしも格子正則化が良いとは限りません。そのことを理解するために、まず、超対称性を持たないヤンミルズ理論がなぜ格子正則化で調べられるのかを復習します。すると、超対称が入るとなぜ事情が変わるのが見えてきます。その後、次元毎にどのような正則化が良いのかを説明し、シミュレーション結果を超弦理論と比較します。

¹¹弦の結合定数は λ/N^2 に比例します。この対応は、1970年代にトフーフトによって対応されたものと同じです。Appendix A でトフーフトのアイデアを紹介します。

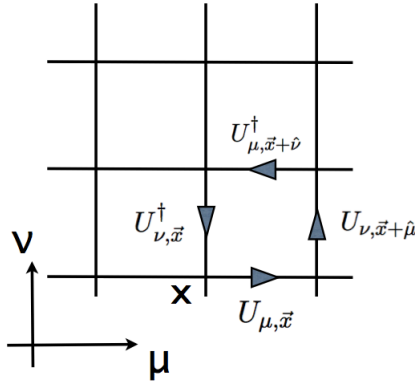


図 9: ウィルソンのプラケット作用。

3.1 格子ゲージ理論はなぜうまくいくか

例として、 $(3+1)$ 次元のヤンミルズ理論を考えます。ゲージ群は $U(N)$ とします。連続空間での作用は

$$S_{\text{連続}} = \frac{1}{4g_{YM}^2} \int d^4x \text{Tr} F_{\mu\nu}^2 \quad (6)$$

で与えられます。この理論の格子正則化として、正方格子 $\{\vec{n} = (n_1, n_2, n_3, n_4) | n_i \in \mathbb{Z}\}$ 上のウィルソン (K. G. Wilson) のプラケット作用 (図 9) を用いる事にします。格子の上の作用は

$$S_{\text{格子}} = -\beta N \sum_{\vec{n}} \text{Tr} \left(U_{\mu, \vec{n}} U_{\nu, \vec{n} + \hat{\mu}} U_{\mu, \vec{n} + \hat{\nu}}^\dagger U_{\nu, \vec{n}}^\dagger \right) \quad (7)$$

で与えられます。 $U_{\mu, \vec{n}}$ は二つの格子点 \vec{n} と $\vec{n} + \hat{\mu}$ をつなぐリンクの上に載っているユニタリ変数で、エルミート行列であるゲージ場 $A_\mu(\vec{n})$ と格子間隔 a を用いて

$$U_{\mu, \vec{n}} = e^{iaA_\mu(\vec{n})} \quad (8)$$

と表されます。 $(\hat{\mu}$ は μ 方向に格子1つ分だけ平行移動するベクトルで、例えば $\hat{1} = (1, 0, 0, 0)$, $\hat{2} = (0, 1, 0, 0)$ です。) aA_μ が小さいと思って格子間隔 a の冪で展開すると、 $\beta = 1/(g_{YM}^2 N)$ とすれば、

$$S_{\text{格子}} = S_{\text{連続}} + (\text{定数}) + O(a^4) \quad (9)$$

となるので、連続極限 $a \rightarrow 0$ で結合定数 β をうまく調節すれば連続理論が再現できます。

以上は古典論のレベルの作用の対応です。量子論的にも問題なく正しい理論が得られることを示すためには、格子上で保たれている厳密な対称性が重要な役割を果たします。ウィルソンのプラケット作用の持つ厳密な対称性には

- ゲージ対称性
- 離散的な並進対称性

- 90度回転対称性
- 荷電共役変換

があります。

格子ゲージ理論の連続極限を取るには、低エネルギーで、格子構造が見えないくらい長距離の物理を考えます。短距離の自由度は積分してしまって低エネルギー有効作用を考えるわけですが、もし格子作用がゲージ対称性を持っていなかったとすると、輻射補正は一般にゲージ対称性を破ってしまいます。それを避けるためには不要な輻射補正を相殺するように新たな項を付け加えて係数を微調整する必要があります。これは「ファインチューニング問題」と呼ばれています。ウィルソンのプラケット作用の場合には、正則化したレベルできちんとゲージ対称性が保たれているので、このような問題は起きません。同様に、離散的な並進対称性や回転対称性のおかげで低エネルギーでの連続的な並進対称性と回転対称性が保証されます。これはとても重要なポイントなので、標語として書いておきましょう：

ファインチューニング問題を避けるためには厳密な対称性が重要。

同じ問題は、格子上にフェルミオンを載せようとする場合にも現れます。例えば、ウィルソンフェルミオンはカイラル対称性を保たないので、質量が有限になるようにファインチューニングを行う必要があります。一方で、オーバーラップフェルミオンの場合にはこのような問題がありません。詳しくは青木さんのレクチャーノートを参照して下さい。

3.2 超対称ヤンミルズ理論はなぜ格子に載せるのが難しいか

次に、本題である超対称ゲージ理論を考えましょう。連続空間での超対称代数は大雑把に言って

$$\{Q, \bar{Q}\} = \sigma^\mu \partial_\mu \quad (10)$$

という形をしています。 ∂_μ は微分、言い換えると「無限小の並進の生成子」です。このことから、格子上で超対称性を完全に保つことは不可能であることが直ちに分かります。なぜならば、格子は無限小並進を離散的な並進（格子一マス分の並進）まで破るからです。格子を用いる限り、無限小並進を含まないような部分代数しか保てません。ところが、このような部分代数だけでは一般に超対称性を破るような輻射補正を禁止できないのです。そこで、理論ごとに様々な手法を駆使してファインチューニングを避けることとなります。大雑把に言って、次の四通りのアプローチが提唱されています。

- 超対称性以外の対称性を使って輻射補正をコントロールする。四次元 $\mathcal{N} = 1$ 極小ヤンミルズ理論（ゲージ場とその超対称パートナーであるゲージノだけで、物質場が存在しないような理論）の場合が有名です。
- 超対称性を破る輻射補正を禁止できるよううまい部分代数を格子上で厳密に保つ。この手法は二次元のヤンミルズ理論の場合に非常にうまく機能します。

- 格子以外の手法（特に行列模型）を用いる。この手法は、超弦理論に由来する極大超対称ヤンミルズ理論に対して威力を発揮します。また、 $(0+1)$ 次元の理論に対しては、遥かに簡単な手法が適用可能です。
- 諦めてファインチューニングをする。これも、ファインチューニングが必要なパラメーターを絞り込めればうまくいく可能性があります。

3.2.1 負符号問題

超対称ゲージ理論には、もう一つ、「負符号問題」とよばれる厄介な技術的な問題があります。これは超対称ゲージ理論に限らず、有限バリオン密度 QCD やハバードモデルのシミュレーションでも現れる問題です。

ファインマン経路積分ではフェルミオンはグラスマン数なので、そのまま計算機に載せることは出来ません。そこで、フェルミオンだけ先に手で積分してしまいます。すると、分配関数は

$$Z = \int dAdXd\psi e^{-S} = \int dAdXPf(A, X)e^{-S_b} \equiv \int dAdXe^{-S_{eff}} \quad (11)$$

となります。ただし、 $Pf(A, X)$ はフェルミオン ψ に作用するディラック演算子のパフィアン¹²です。すると、有効作用 $S_{eff}(A, X) = S_b - \log Pf(A, X)$ はボソニックな場だけで書けているので、計算機で普通に積分できます。しかし、普通に積分すると計算量が膨大になってしまうので、モンテカルロ法では相対確率 $e^{-S_{eff}}$ で配位 $\{A^{(i)}, X^{(i)}\}$ を生成し、平均を取ることで、経路積分を近似します：

$$(\text{演算子 } \hat{O}(A, X) \text{ の期待値}) = \frac{\int dAdXe^{-S_{eff}} \hat{O}(A, X)}{\int dAdXe^{-S_{eff}}} = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^K \hat{O}(A^{(i)}, X^{(i)})}{K}. \quad (12)$$

こうすると、経路積分に大きく寄与する配位ほど多く現れて、比較的少ないサンプル数 K でも良い近似になります。しかし、この手法は $e^{-S_{eff}}$ が正定値の時にしか適用できません。 $e^{-S_{eff}}$ が正定値でないと、「確率」ではなくなってしまう、効率の良いアルゴリズムが使えなくなってしまうのです。（作用の実性からパフィアの正定値性が保証されると思われるかもしれませんが、格子シミュレーションではユークリッド化された作用を用いるので、作用は必ずしも実ではありません。）超対称ゲージ理論では、かなり一般的に、パフィアンが複素数になってしまいます。（単に負符号だけではない一般の複素位相が出ることから「位相問題」と呼ばれることもあります、本質的に同じです。）

このような理論を無理矢理シミュレーションするためには、例えば次の恒等式が使えます：

$$\begin{aligned} \langle \hat{O} \rangle &= \frac{\int dAdXPf(A, X)e^{-S_b} \hat{O}(A, X)}{\int dAdXPf(A, X)e^{-S_b}} \\ &= \frac{\int dAdX |Pf(A, X)| e^{-S_b} \hat{O}(A, X) \cdot \text{phase}}{\int dAdX |Pf(A, X)| e^{-S_b}} \cdot \left(\frac{\int dAdX |Pf(A, X)| e^{-S_b} \cdot \text{phase}}{\int dAdX |Pf(A, X)| e^{-S_b}} \right)^{-1} \\ &= \frac{\langle \hat{O} \cdot \text{phase} \rangle_0}{\langle \text{phase} \rangle_0} \end{aligned} \quad (13)$$

¹²定義を知らない人は、行列式の平方根だと思って下さい。

ここで、 $\langle \hat{O} \rangle$ は演算子 $\hat{O}(A, X)$ の期待値、 $phase = Pf(A, X)/|Pf(A, X)|$ はパフィアの位相で、 $\langle \cdot \rangle_0$ は位相を無視して重み $|Pf(A, X)|e^{-S_b}$ で計算した期待値です。この新しい「重み」は定義そのものから明らかに正定値なので、分子 $\langle \hat{O} \cdot phase \rangle_0$ も分母 $\langle phase \rangle_0$ も原理的にはモンテカルロシミュレーションで計算できます。この手法は、位相の効果をあとから重みづけし直しているという意味でリウエイティング法と呼ばれます。ただ、位相が激しく振動する場合には分子も分母もほとんどゼロになってしまい、実質的に $0/0$ を計算することになってしまって莫大な統計が必要になります。また、そのような状況では、位相を落とした理論（位相クエンチ理論）が元々の理論と似ている保証はありません。もし二つの理論の真空が全く異なれば（経路積分に重要な寄与をする配位に「オーバーラップ」がなければ）、位相クエンチシミュレーションに現れる配位の 99.9999% は元の理論に関係なく、そのような配位の効果は位相の振動で相殺されてしまって、配位の 0.0001% が結果を支配するという状況も考えられます。（これを特に「オーバーラップ問題」と呼びます。）

負符号問題を避けるための一般的な方法は知られていません。（もし一般的な解法があれば、計算機科学で有名な「 $P \neq NP$ 予想」の反例になってしまうという議論もあり、一般的な解法は存在しないと広く信じられています。）しかし、超対称ゲージ理論の場合には、以下に説明するように、負符号問題が奇跡的に避けられてしまいます¹³。

- 四次元 $\mathcal{N} = 1$ 極小ヤンミルズ理論（ゲージ場とゲージノだけの理論）やそれを次元縮約して得られる理論（たとえば二次元 $\mathcal{N} = (2, 2)$ 理論）では、連続理論の対称性が正定値性を自然に保証してくれます。厳密な超対称性を一部保つ格子正則化の場合には格子正則化という人為的な操作をしたせいで複素位相が現れますが、リウエイティング法を用いると、連続極限に近づくに従って $phase = 1$ に鋭いピークが立っていき、位相クエンチ近似が厳密に正しい結果を与えるようになります。（これはまだ当たり前で、「奇跡」ではありません。）
- 有限温度のシミュレーション¹⁴では、高温極限で位相が消えますが、低温領域では一般に負符号問題が現れます。ただ、どの程度低温にいけば負符号問題が起きるのかはやってみなければ分からない問題です。我々が論文 [10, 1] で一次元のゲージ理論のエネルギーを計算してゲージ/重力対応を検証した際、シミュレーションに取りかかる前には、弱結合の超弦理論に対応するようなゲージ理論の低温領域（強結合領域）では負符号問題が現れてしまうのではないかと危惧していたのですが、実際にシミュレーションしてみると、これらの論文で調べられた範囲ではフェルミオン行列式が殆ど正定値で、負符号問題は実質的に存在しませんでした。
- もっと低温に行ったり、あるいはフェルミオンに周期境界条件を課したりすると、位相が振動し始めます。にも関わらず、位相を落とした位相クエンチ近似で計算すると、重力側で計算したのと同じ結果が得られることが数値的に確認されています。位相を入れても入れなくても答えが変わらないことは、位相の期待値が極端に小さくならない範囲であれば数値的に確認することも出来ます。

他の理論、例えば超対称 QCD の場合にも同じことが起こるかどうかはまだ分かりませんが、負符号問題を恐れずにシミュレーションに挑戦する価値が充分にあるのは間違いありません。

¹³このことをカプランに説明して、「こんな奇跡を信じますか」と尋ねたところ、「この世で一番美しい理論なんだから、どんな奇跡だって信じる」という答えが返ってきました。その場のノリで言っただけかも知れませんが。

¹⁴虚時間方向の境界条件として、ボソンに周期境界条件、フェルミオンに反周期境界条件を課します。

3.3 超対称ヤンミルズ理論の定式化

3.3.1 四次元 $\mathcal{N} = 1$ 極小ヤンミルズ理論

四次元 $\mathcal{N} = 1$ 極小ヤンミルズ理論では、低エネルギーで超対称性を破る危険があるのはゲージノの質量項だけですが、これは SUSY を用いるまでもなくカイラル対称性を用いて禁止することが出来ます [11]。

超対称 QCD の場合には、クォークの超対称パートナーのスカラー粒子（スクォーク）の質量項を禁止するためには超対称性そのものが必要になるので、ファインチューニングに頼らない定式化は今のところ知られていません。

3.3.2 格子上の厳密な超対称性

格子上で超対称性を全て保つことが出来ないのは、代数に無限小並進（微分）が含まれるからでした。しかし、無限小並進を含まないような部分代数であれば問題ありません。この事情は別にヤンミルズ理論でなくても同じなので、一般の理論を考えましょう。ボソンを $\phi_{\text{連続}}$ 、フェルミオンを $\psi_{\text{連続}}$ とします。（格子化する前であることを強調するために「連続」という添字を付けています。）定義から、任意の生成子 $Q_{\text{連続}}$ のもとで作用 $S_{\text{連続}}$ は不変です：

$$Q_{\text{連続}} (S_{\text{連続}}[\phi, \psi]) = 0. \quad (14)$$

この性質を格子の上で保てるかどうかの問題です。うまい格子作用を作るための第一歩は、

$$Q_{\text{連続}} (V_{\text{連続}}[\phi, \psi]) = S_{\text{連続}}[\phi, \psi] \quad (15)$$

となるような $V_{\text{連続}}$ と $Q_{\text{連続}}$ を見付けることです。このような $V_{\text{連続}}$ と $Q_{\text{連続}}$ が見付かったら、次に、 $Q_{\text{連続}}$ の格子バージョンをつくります。ただし、このときに

$$Q_{\text{連続}}^2 = 0 \quad (16)$$

という関係式を保つようにします。さて、無事にそのような格子変数 $\phi_{\text{格子}}$ 、 $\psi_{\text{格子}}$ と生成子 $Q_{\text{格子}}$ ($Q_{\text{格子}}^2 = 0$) が作れたとしましょう。すると、

$$S_{\text{格子}}[\phi_{\text{格子}}, \psi_{\text{格子}}] \equiv Q_{\text{格子}} (V_{\text{格子}}[\phi_{\text{格子}}, \psi_{\text{格子}}]) \quad (17)$$

は $Q_{\text{格子}}$ の生成する格子上の超対称変換のもとで不変です：

$$Q_{\text{格子}} (S_{\text{格子}}[\phi_{\text{格子}}, \psi_{\text{格子}}]) = Q_{\text{格子}}^2 (V_{\text{格子}}[\phi_{\text{格子}}, \psi_{\text{格子}}]) = 0. \quad (18)$$

カプラン (D. B. Kaplan)、カツツ (E. Katz)、ウンザル (M. Ünsal) は、超対称ヤンミルズ理論に対してこのような格子正則化を実際に構成してみせ、二次元のヤンミルズ理論の場合には厳密な超対称性とその他の対称性を組み合わせて（少なくとも摂動の全ての次数で）超対称性を破るような輻射補正を禁止することが出来ることを示しました [12]¹⁵。数値シミュレーションによって、非摂動

¹⁵正確に言うとカプラン達の方法はここで説明したものとは少し異なります。ここで説明したのは、カプラン達の論文に触発されて杉野さんが開発した手法です [13]。

的にもファインチューニングが不要である事も強く示唆されています [14, 15, 16]。ただ、四次元のゲージ理論の場合は、このようにして保った厳密な超対称性だけでは輻射補正をコントロールできません¹⁶。

3.3.3 行列模型を用いた定式化

格子と超対称性の相性が良くないのであれば、いっそのこと格子に載せるのは諦めてしまうというのは非常に自然な発想です。超対称ゲージ理論を考える上では、ラージ N 行列模型のテクニックが非常に強力です。特に、

- 江口-川合等価性 [17] を用いる。
- 非可換空間 [18] を用いる。

という二つのアプローチが有効です。江口-川合等価性というのは、ラージ N の場の理論がより 0 次元や 1 次元の行列模型と等価になるというものです。大雑把に言うと、格子の情報が行列に埋め込まれているというイメージです。行列のサイズ N がカットオフを与えていて、連続極限はラージ N に対応します。0 次元の行列模型まで落としてしまえばそもそも正則化の必要がありませんし、1 次元でも、次節で説明する運動量カットオフの方法が使えます。非可換空間の手法もこれと似ています。以下、この二つの方法を簡単に説明します。

江口-川合等価性

L^4 格子上的の $U(N)$ 理論のウィルソン作用

$$S_{\text{格子}} = -\beta N \sum_{\vec{n}} \text{Tr} \left(U_{\mu, \vec{n}} U_{\nu, \vec{n}+\hat{\mu}} U_{\mu, \vec{n}+\hat{\nu}}^\dagger U_{\nu, \vec{n}}^\dagger \right) \quad (19)$$

を考えます。この理論の基本的な物理量は、様々な閉経路 (ループ) C にそってリンク変数を掛け合わせて得られるウィルソンループ

$$W(C) = \frac{1}{N} \text{Tr} \left(U_{\mu, \vec{n}} U_{\nu, \vec{n}+\hat{\mu}} U_{\rho, \vec{n}+\hat{\mu}+\hat{\nu}} \cdots \right) \quad (20)$$

です。ループ C は格子そのものよりも大きくて良いことに注意して下さい。(無限に大きい格子の上で大きなループを描いてから周期境界条件を課せば、小さな格子にグルグルと何度も巻き付いたループになります。) この理論には、

$$U_{\mu \vec{n}} \rightarrow e^{2\pi i k_\mu / N} U_{\mu, \vec{n}} \quad (k_\mu \in \mathbb{Z}). \quad (21)$$

という大域的な $(\mathbb{Z}_N)^4$ 対称性があります。もしこの対称性が自発的に破れなければ、トフーフトのラージ N 極限 (β と L を固定して $N \rightarrow \infty$) では $W(C)$ の期待値が格子の L に依らなくなります。これが「江口-川合等価性」です。特に、 $L = 1$ とすれば、単なる行列模型になります。

¹⁶三次元の極大超対称ゲージ理論ならファインチューニングが要しないと証明できるとウンザルが言っていました、論文にはなっておらず、僕には確認できていません。

実は、この例では、 L が小さすぎると $(\mathbb{Z}_N)^4$ 対称性が自発的に破れてしまい、江口-川合等価性が成り立ちません [19]。しかし、同じような手法は超対称ゲージ理論にも使え、その場合には江口-川合等価性が成り立ちます。

江口-川合等価性には色々な証明がありますが、直観的に最も分かり易いのは、 $(\mathbb{Z}_N)^4$ 対称性を保つ真空の周りでの揺らぎを調べると、ラーシ N で L 依存性が消える、というものです [19, 20]。この見方では、 $(\mathbb{Z}_N)^4$ 対称性の自発的な破れは、真空の不安定性を意味します。特に、ゴンザレス・アロヨ (A. Gonzalez-Arroyo) と大川さんの仕事 [20] では、次節で説明する非可換空間の上の場の理論の摂動計算のルールが時代に先駆けて導出されており、適切なラーシ N 極限を取ることで江口-川合等価性が成り立つことが示されています。阪大のグループの 2008 年の論文 [21] では、超対称行列模型のある種の真空の周りで同様の議論を適用し、江口-川合等価性を通じて四次元の超対称ヤンミルズ理論と関係づいていること、その真空が超対称性のおかげで安定であることを示しています。

非可換空間

普通の場合の理論では、二つの関数の積の順序は可換です。「非可換空間」では、それを非可換な積に置き換えます。非可換化には色々なやり方がありますが、最もポピュラーなのは座標 x^μ に対して

$$[x^\mu, x^\nu]_\star \equiv x^\mu \star x^\nu - x^\nu \star x^\mu = i\theta^{\mu\nu} \quad (22)$$

とするというものです。ここで、 $\theta^{\mu\nu}$ は実定数で、 $\theta^{\mu\nu} = -\theta^{\nu\mu}$ とします。(通常積と違うことを強調するために \star を用いています。) このルールのもとで、平面波の積はどうなるのでしょうか？まず、 $e^{ik_\mu x^\mu}$ の定義は普通の場合の時と同じです。なぜなら、 $ik_\mu x^\mu$ は自分自身とは可換なので、テイラー展開の各次数で積の順序に不定性が無いからです：

$$\begin{aligned} e^{ik_\mu x^\mu} &= 1 + ik_\mu x^\mu + \frac{1}{2!}(ik_\mu x^\mu) \star (ik_\mu x^\mu) + \frac{1}{3!}(ik_\mu x^\mu) \star (ik_\mu x^\mu) \star (ik_\mu x^\mu) + \dots \\ &= 1 + ik_\mu x^\mu + \frac{1}{2!}(ik_\mu x^\mu)^2 + \frac{1}{3!}(ik_\mu x^\mu)^3 + \dots \end{aligned} \quad (23)$$

異なる平面波のかけ算は少し複雑です。非可換な行列 X, Y に対する公式

$$e^X e^Y = e^{X+Y+[X,Y]/2+[X,[X,Y]]/12-[Y,[X,Y]]/12+\dots} \quad (24)$$

が今の場合にもそのまま使えることに注意すると、

$$\begin{aligned} e^{ik_\mu x^\mu} \star e^{il_\mu x^\mu} &= e^{ik_\mu x^\mu + il_\mu x^\mu - [k_\mu x^\mu, l_\mu x^\mu]_\star / 2 - i[k_\mu x^\mu, [k_\mu x^\mu, l_\mu x^\mu]_\star] / 12 + i[l_\mu x^\mu, [k_\mu x^\mu, l_\mu x^\mu]_\star] / 12 + \dots} \\ &= e^{i(k_\mu + l_\mu)x^\mu - i(k\theta l) / 2 - i[k_\mu x^\mu, i(k\theta l)]_\star / 12 + i[l_\mu x^\mu, i(k\theta l)]_\star / 12 + \dots} \\ &= e^{-i(k\theta l) / 2} e^{i(k_\mu + l_\mu)x^\mu} \end{aligned} \quad (25)$$

となります。ここで、 $k\theta l \equiv k_\mu \theta^{\mu\nu} l_\nu$ は単なる数なので高次の \star -交換子は全てゼロになることを用いました。

鋭い人は、ここまでの計算を見て、量子力学に於ける座標と運動量の正準交換関係 (ハイゼンベルグ代数) と同じだと気づいたかもしれません。全くもってその通りで、 $p_\mu \equiv (\theta^{-1})_{\mu\nu} x^\nu$ とすれ

ば $[p_\mu, x^\nu]_\star = i\delta_\mu^\nu$ となります。従って、非可換空間の座標 x^μ をハイゼンベルグ代数の生成子 \hat{x}^μ ($[\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] = i\theta^{\mu\nu}$) に置き換え、 \star -積を単なる線型演算子の積に置き換えれば、非可換空間の計算ルールが再現できます。然るに、線型演算子は単に無限に大きな正方行列とすることが出来ます。ですから、非可換空間上の関数は正方行列に埋め込むことができます。具体的な対応ルールは次のようになります：

	行列模型	非可換空間
座標	\hat{x}^μ	x^μ
平面波展開	$\sum_k \tilde{f}(k) e^{ik\hat{x}}$	$\sum_k \tilde{f}(k) e^{ikx}$
掛け算	行列の積	\star 積
微分	$-i[\hat{p}_\mu, \cdot]$	$\partial/\partial x^\mu$
積分/トレース	Tr	$\int dx$

(26)

この対応を用いて、非可換空間上の場の理論を行列模型に埋め込むことが出来ます [22, 20]。出発点として、

$$S = -N \sum_{\mu, \nu=1}^4 Tr[X_\mu, X_\nu]^2 \quad (27)$$

という行列模型を考えましょう。ただし、 X_μ は $N \times N$ のエルミート行列とします。 $X_\mu = \hat{p}_\mu$ はこのモデルの古典解になっています。 \hat{p}_μ の周りで $X_\mu = \hat{p}_\mu + \hat{a}_\mu$ という展開をすると¹⁷、 X_μ との交換子は \hat{a}_μ というゲージ場を伴う非可換空間上の共変微分と同一視できます：

$$-i[X_\mu, \cdot] \quad \leftrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x^\mu} \cdot -ia_\mu(x) \star \cdot + \cdot \star ia_\mu(x) \quad (28)$$

従って、 $[X_\mu, X_\nu]$ は非可換空間上の $F_{\mu\nu}$ と同一視できます：

$$-i[X_\mu, X_\nu] \quad \leftrightarrow \quad F_{\mu\nu} = \frac{\partial a^\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial a^\mu}{\partial x^\nu} - i[a_\mu(x), a_\nu(x)]_\star. \quad (29)$$

従って、行列模型の作用と非可換空間上のゲージ理論の作用が同じになります。(もちろん、古典解 $X_\mu = \hat{p}_\mu$ の周りでの揺らぎがあまり大きくないことは仮定しています。) この対応のもとで、ファインマン則が一致することも確認できるので、この等価性は量子論レベルで成り立つと言えます。

超対称ヤンミルズ理論の非可換空間版は、元々の可換空間の上の理論と同じだけの超対称性を持ちます。ただ、非可換パラメータ θ をゼロに持っていく極限(可換極限)では、古典レベルでは当然ながら可換空間上の理論が再現されるのですが、量子補正も考えると赤外発散の構造が違ってしまうという問題があることが知られています。しかし、ラージ N 極限や極大超対称性がある場合にはこのような問題は無く、可換空間上の理論が再現されると広く信じられています。従って、行列

¹⁷ \hat{x}^μ ではなくて \hat{p}_μ を用いたことに注意して下さい。また、厳密には、ハイゼンベルグ代数は N が無限大の極限でのみ実現できます。これは無限に広い平坦な非可換空間が無限大の自由度を持っていることに対応します。非可換球面や非可換トーラスと呼ばれるコンパクトな非可換空間を記述する行列を用いれば、有限の N でハイゼンベルグ代数をうまく近似できます。

模型を使って非可換空間上の超対称ヤンミルズ理論を作り、その可換極限を取るという手法で、超対称性を破らない正則化が可能になります。(必ずしもゼロ次元まで落とさなくても、例えば二次元のヤンミルズ理論を格子上で作り、それにさらに非可換空間の手法で二次元を足して四次元を作る、ということも可能です。)

3.3.4 一次元超対称ヤンミルズ理論と運動量カットオフの方法

一次元の行列量子力学には、(よほどおかしな正則化をしない限り)紫外発散が存在しません。従って、わざわざ格子を用いる必要もありません。(ゲージ理論を格子で正則化するのは、ゲージ対称性を保って紫外発散をコントロールしたかったからであることを思い出して下さい。)論文 [23] では、単純に場をフーリエ変換してから運動量にカットオフを導入するだけで、格子を用いるよりも遥かに簡単かつ効率の良い正則化が出来ることが示されています。この手法は非常に強力で、行列量子力学とブラック 0 プレーンの間のゲージ/重力対応に適用されて成功を収めました。

3.4 シミュレーション結果と弦理論的な解釈

3.4.1 (0 + 1) 次元

マルダセナ予想によれば、(0 + 1) 次元の極大超対称ヤンミルズ理論で、スカラー場 X_i が全てゼロ近くに固まっている状況は、ブラック 0 プレーン解周りの IIA 型超弦理論に対応しています [9]。この理論の結合定数 $\lambda = g_{YM}^2 N$ は質量の三乗の次元を持つので、この理論は共形不変ではありません。にも関わらず、重力側の計算は、この理論がラージ N で共形場理論に類似した性質を示すことを予言します。例えば、相関関数が二点間距離のベキになる質量ゼロの場が存在しますし、また、有限温度では常に(ポリャコフループがゼロでない期待値を持つという意味で)非閉じ込め相にあります。

モンテカルロ法を用いれば、このような性質をゲージ理論の側から直接導くことが出来ます。以下、モンテカルロ法で明らかになったゲージ理論の性質とその弦理論的な解釈をまとめます。

- この理論の作用には、 $-Tr[X_i, X_j]^2$ というスカラー場のポテンシャル項が存在します。古典レベルでは、 $[X_i, X_j] = 0$ となる状態は全て基底状態です。超対称性があると、輻射補正を考慮してもこの基底状態の縮退が残ります。($[X_i, X_j] = 0$ となる X_i のことを、ポテンシャルが平らになっているという意味でフラットディレクションと呼びます。) この様な性質は後で説明するように量子重力的な解釈をするために不可欠なのですが、モンテカルロシミュレーションをする際には技術的に面倒な問題を引き起こします。フラットディレクションに沿ってどこまでも転がって行ってしまいうので、ある特定の真空の性質を調べるのが困難なのです。しかし、実際に数値シミュレーションをすると、原点の周りに全ての固有値が集まっているような状況 ($X_i \simeq 0$) は準安定になります。(フラットディレクションの存在は、固有値が十分に離れていると仮定して摂動論を用いて示されるので、 $X_i \simeq 0$ のような非摂動効果が重要な領域に準安定状態が現れても不思議はありません。) この準安定状態は、シミュレーションを長時間続けるといずれは崩壊してしまいます。これは例えば $Tr X_i^2 / N$ をプロットすると分かります。

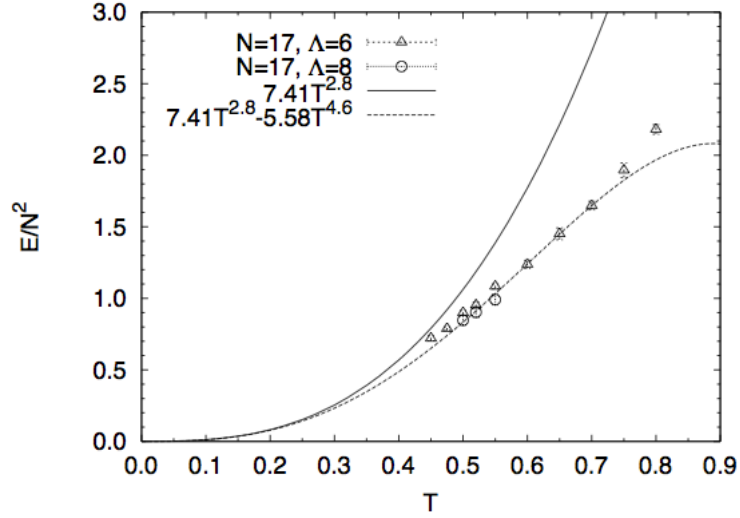


図 10: 超対称行列量子力学とブラックホールのエネルギーの比較。([1] より転載。)

初期条件を $X_i = 0$ としてシミュレーションを始めると、この量は $O(1)$ でしばらく振動したあと、無限大に発散していきます。温度が同じ時は、 N が大きいほど振動が長く続きます。すなわち、 N が大きいほど安定になります。超弦理論の立場では、この準安定状態は D0 ブレーンの固まり、すなわちブラック 0 ブレーンと解釈できるので、準安定状態の崩壊はホーキング輻射と解釈するのが自然です。ブラック 0 ブレーンは弦理論の量子補正が無視出来る極限では安定ですが、ゲージ理論のラージ N 極限は弦理論の古典極限に対応しているので、ラージ N 極限で準安定状態が安定化するというシミュレーション結果が自然に理解できます。ブラックブレーンからの予言とゲージ理論を比較するためには、準安定状態に属する配位だけを用いて期待値を取ります。

- ヤンミルズ理論のエネルギー E は、ブラックブレーンの ADM 質量 (のゼロ温度からのズレ) に対応すると予想されています。ラージ N 極限、すなわち弦理論の古典極限では、重力側では

$$\frac{(\lambda^{-1/3}E)}{N^2} = 7.41(\lambda^{-1/3}T)^{2.8} + c(\lambda^{-1/3}T)^{4.6} + \dots, \quad (30)$$

が得られます。ただし、 c は未知の定数です。右辺第一項が超重力の極限で、第二項は超弦理論の効果です。($\lambda = g_{YM}^2 N$ は質量の三乗の次元を持っているので、両辺ともに無次元です。) ゲージ理論側での計算は [10, 1, 24, 25] で成されました。特に、[1] では超重力からのズレが詳細に計算されて、 $(\lambda^{-1/3}T)^{4.6}$ というベキが確認されました (図 10 参照)。これは、ゲージ/重力対応が弦理論の α' 補正も含めて成り立つことの強力な証拠と言えます。弦理論の側で計算できていない c という係数は、数値シミュレーションから $c \simeq -5.58$ となります。

- ポリャコフループ (虚時間方向に巻き付いたウィルソンループ) $P = \frac{1}{N} \text{Tr} P e^{\int dt iA}$ は閉じ込

め/非閉じ込め相転移のオーダーパラメーターになっています。ゲージ重力対応では、普通のポリアコフープの代わりに、局所的に超対称性を保つ一般化である「超対称ポリアコフープ」 $P_{\text{超}} = \frac{1}{N} \text{Tr} P e^{\int dt (iA + X_j)}$ を考えるのが自然です。ここで、スカラー場 X_j の添字 j は 1 から 9 のどれでも構いません。一般の「超対称ウィルソンループ」 $W_{\text{超}}$ も同様にして定義できます。

スカラー場が出てくるのは、以下のようにして理解できます。まず、ウィルソンループというのはゲージ場の中をプローブ電荷がぐるっと一周しているものであることを思い出しましょう。超弦理論ではゲージ場は D プレーンの上に住んでおり、電荷は開弦の端に載っているのので、「プローブ開弦が D プレーンの上をぐるっと周る」状況を考えればウィルソンループが得られるはずですが (図 11)。しかし、こうすると、開弦が D プレーンを引っ張る効果を考慮する必要があります。D プレーンが引っ張られるとその座標を表すスカラー場 X_j が変化するので、ウィルソンループにスカラー場を入れる必要があります。

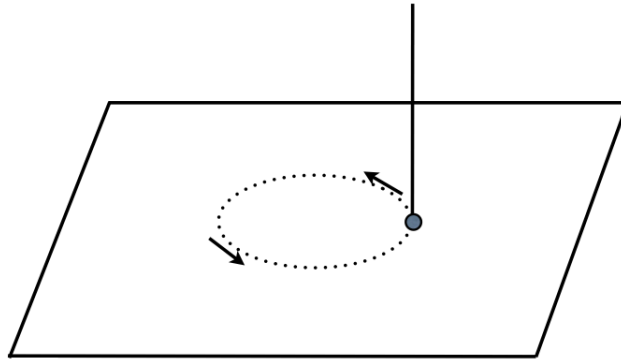


図 11: プレーンに端を持つ開弦を手で導入すると、プレーン上のゲージ理論ではプローブ電荷を導入したと解釈出来る。この開弦を一周させると、ウィルソンループが出来る。

ウィルソンループの期待値は、ラージ N 、強結合の極限では対応する曲がった時空中での弦の世界面の面積の最小値 A を用いて

$$\log \langle W_{\text{超}} \rangle \propto A \quad (31)$$

と表されると予想されています (図 12) [26, 27]。(ただし、 A からは適切な処方に従って発散項を差し引く必要があります。) この処方箋をいま考えているポリアコフープの場合に適用し、比例係数もきちんと考慮すると、 $\log \langle P \rangle \simeq 1.89/T^{0.6} + \text{const.}$ が得られます。論文 [28] では、この振る舞いが確認されました¹⁸。

- GKPW (Gubser-Klebanov-Polyakov-Witten) 関係式 [29, 30] を使うと、超重力の計算でゲージ理論ラージ N 、強結合での相関関数を求められると予想されています。プレーンの上にあるゲージ理論の演算子がプレーンから離れたバルク時空を伝播する重力子を交換して相互作

¹⁸正確に言うと、論文 [28] では $\langle \log |P| \rangle$ を計算しています。

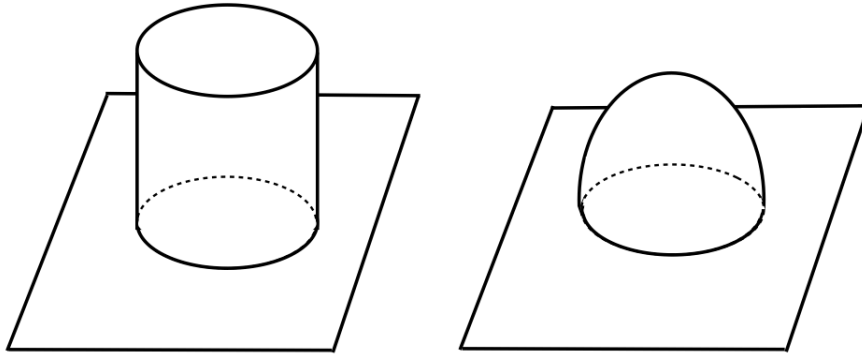


図 12: ウィルソンループを表す世界面。プレーンに端点を持つ開弦のループがウィルソンループを表す(左図)。 N が大きいと、プレーンの効果で時空が曲がってブラックプレーンになる。それに応じて世界面も変化する(右図)。経路積分への寄与は面積が最小となる世界面が支配的。

用するというイメージです。(より正確には、重力側で考えているブラックプレーン時空(のホライズン近傍)はプレーンの直上と見分けがつかないので D プレーンの上を動く開弦とブラックプレーン時空時空を運動する閉弦が対応している、と思った方がいいかも知れません。) ブラック 0 プレーン時空では、関野さん、米谷さんによって様々な二点関数が計算されています [31]。論文 [32, 33] では、これらをゲージ理論側で計算し、 $U(2)$ や $U(3)$ でも非常に高い精度で重力側の計算と一致することが示されました。

3.4.2 (1 + 1) 次元

空間方向が周期 L にコンパクト化された $(1 + 1)$ 次元の $U(N)$ 極大超対称ゲージ理論を考えましょう。境界条件は、ボソン、フェルミオンともに周期境界条件とします。この理論は、10 次元のミンコフスキー時空 $\mathbb{R}^{1,9}$ をコンパクト化した $\mathbb{R}^{1,8} \times S^1$ 時空中の IIB 型超弦理論で N 枚の D1 プレーンが S^1 に巻き付いているという状況を記述します。

S^1 コンパクト化された時空中の超弦理論には、T-双対性と呼ばれる重要な性質があります。これは、周期 L の時空中の IIB 型超弦理論と周期 $L' \equiv 2\pi\alpha'/L$ の時空中の IIA 型超弦理論が等価であるというものです。T-双対性により、 S^1 に巻き付いた D1 プレーンは D0 プレーンに写り、D0 プレーンの S^1 上の座標は D1 プレーン上のゲージ場のウィルソンライン $W = \text{Pe}^{i \int A_x dx}$ の固有値と同定されます。(詳細は [6] を参照して下さい。)

D0 プレーンを沢山集めると、ブラックホールを作ることが出来ます。これまではブラックホールのトポロジーとして普通の球状のものしか考えませんでした。D0 プレーンの並べ方によってはもっと複雑なものも作ることが出来ます。D0 プレーン(ウィルソンラインの固有値)が一点に固まっている状況は、 S^1 中で局在したブラックホールに対応します。また、D0 プレーン(ウィルソンラインの固有値)が S^1 上に一様に分布している状況は、 S^1 に巻き付いた、一様なブラックストリングを表します。この他にも、 S^1 に巻き付いて入るけれども太さが一様でないようなブラックストリング

も存在する可能性があります。

ウィルソンライン $W = \text{Pe}^{i \int A_x dx}$ は \mathbb{Z}_N 中心対称性 $W \rightarrow e^{2\pi i/N} W$ のオーダーパラメーターなので、中心対称性の破れは一様なブラックストリングからブラックホールあるいは非一様なブラックストリングへの相転移と解釈することが出来ます (図 13)。論文 [34] ではこの相転移が格子シミュレーションで調べられました。この論文で調べられた格子や行列のサイズは小さなものですが、それでも高温極限と低温極限の既知の結果を自然につなぐ結果が得られているように見えており、より大規模なシミュレーションによって相転移の詳しい性質が分かるだろうと期待させるには充分です。

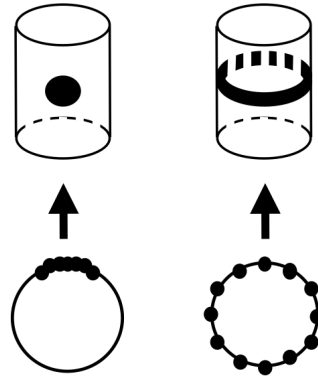


図 13: 中心対称性が破れた相 (左下) と破れていない相 (右下) がブラックホール (左上) と一様なブラックストリング (右上) に対応する。下図の黒丸はウィルソンラインの位相を表し、単位円周上に値を取る。

3.4.3 (3 + 1) 次元

(3 + 1) 次元のシミュレーションは計算量が大きいので大変ですが、着実に進歩しています。

- 論文 [35, 36] では、江口-川合等価性を利用した四次元極大超対称ゲージ理論の正則化 [21] を用いて数値シミュレーションが行われています。シミュレーションから得られたウィルソンループ [35] とある種の相関関数 [36] は、AdS/CFT 対応を通じた重力側からの予言と強結合領域でよく一致しています。
- ファインチューニングが必要でもいいからとにかくバカ正直にやっしまえ、というアプローチ [37] も (僕は個人的にはどうかと思いますが) 不可能とは限りません¹⁹。論文 [38] ではとりあえずファインチューニングをしないで、格子サイズが 8^4 でゲージ群が $U(2)$ のシミュレーションを行っています。出て来た結果は重力側からの予言と定性的に合っているように見えます。ファインチューニングも真面目に考えて超対称性の回復が示せたら面白いと思います。

¹⁹論文 [37] の著者の一人が、「lattice QCD でもクオークの質量とかはチューンするだろ、それと比べて特に悪い事でもないと思うよ。」と言っていました。

- (3 + 1) 次元の理論は、(1 + 1) 次元の理論と非可換球面を組み合わせて作る事も出来ます [39]。同じ手法は (0 + 1) 次元から (2 + 1) 次元を作るのにも使えて [40]、その場合の方が計算量は少なく済むので、まずは (2 + 1) 次元の理論のシミュレーションをしてみると良いと思われます。
- 強結合極限に限れば簡単な行列模型で事が足りるのではないかという議論もあります [41]。この方向での数値シミュレーションについては、[42]などを参照して下さい。

4 ABJM 理論と M 理論

ゲージ/重力対応は M 理論に対しても適用可能であると考えられています。M 理論は IIA 型超弦理論の強結合極限で現れると考えられています、弦ではなくて空間 2 次元、時間 1 次元の膜 (membrane; M2 プレーン) が基本的な自由度になる²⁰、低エネルギーの有効作用は 11 次元超重力理論になる、ということの他は謎が多く、摂動論的な定義すら与えられていません。従って、ゲージ/重力対応を通じて「ゲージ理論を用いて M 理論を定義する」ことが重要です²¹。

M 理論と IIA 型超弦理論の関係を見るためには、M 理論の住んでいる 11 次元の時空を S^1 コンパクト化します。この S^1 が小さくなって時空が 10 次元的に見えるようになると、IIA 型超弦理論による記述が良くなります。大雑把に言って、 S^1 の半径が弦理論の結合定数 g_s に対応しています。M2 プレーンが S^1 に巻き付くと、 S^1 が一点に縮んだ極限では空間 1 次元の弦に見えますし、 S^1 に巻き付かなかった場合には 2 次元に広がったままで D2 プレーンとして見えるようになります。

11 次元の平坦な時空の上で M2 プレーンが何枚も重なった状況を考えてみましょう。すると、 N が充分大きい時には、D プレーンを重ねたらブラックプレーン解が得られたのと同様に、11 次元超重力理論のブラックプレーン解と対応するはずですが、11 次元超重力理論には実際にこのような 2 プレーン解が存在し、プレーンの近傍を拡大すると $AdS_4 \times S^7$ 時空になっています。M2 プレーンを記述するゲージ理論があれば、ゲージ/重力対応を通じて $AdS_4 \times S^7$ 背景時空中の M 理論と対応すると期待されます。では、もしそんな理論が存在するとしたら、どのような性質を満たすべきでしょうか。まず、(2 + 1) 次元のプレーンの上の自由度を記述するのですから、(2 + 1) 次元のゲージ理論でなければなりません。さらに、M2 プレーン解の巨大な対称性を持っていないければなりません。単に極大超対称性持っているというだけではなくて、 AdS_4 の構造に対応して共形不変性も持っていません。また、M2 プレーンのモジュライ (11 次元時空中で M2 プレーンと直交する 8 次元方向での M2 プレーンの位置) も記述出来なければなりません。単に極大超対称性を持つというだけであれば (2 + 1) 次元の極大超対称ヤンミルズ理論でもいのように思えますが、この理論は共

²⁰Membrane の M が 'M' 理論の名前の由来だと言われる事が多いですが、mysterious の M だとか、Witten の頭文字 W を逆さまにして M にしたとか、色々な説があります。

²¹こう言ってしまうと少し言い過ぎかも知れませんが、1980 年代には既に、11 次元時空上で極大超対称性を持つ膜の理論が定式化出来る事 [43]、(0 + 1) 次元の極大超対称行列量子力学のラージ N 極限が 11 次元平坦時空上の膜の理論の光円錐ゲージでの正則化を与える事 [44] が知られていました。1996 年には同じ行列量子力学と M 理論の関係が D プレーンの概念を用いて議論されています [45]。しかし、既に見たように、(0 + 1) 次元の極大超対称行列量子力学の解析は簡単ではなく、M 理論の性質を行列量子力学から完全に理解出来たとは到底言えません。

形不変ではないです²²、モジュライも一致しません²³。

このような理論は2008年にアハロニー (O. Aharony)、バーグマン (O. Bergman)、ジャフェリス (D. Jafferis)、マルダセナ (J. Maldacena) によって具体的に構成されました (彼らの名前の頭文字を取ってABJM理論と呼ばれています) [46]。この理論は、一見するととても不思議な構造をしています。M2 プレーンを N 枚重ねた理論のゲージ群は $U(N)$ ではなくて $U(N) \times U(N)$ で、ラグランジアンは

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{U(N) \times U(N)} &= k \operatorname{Tr} \left[\frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho} \left(-A_\mu \partial_\nu A_\rho - \frac{2}{3} A_\mu A_\nu A_\rho + \tilde{A}_\mu \partial_\nu \tilde{A}_\rho + \frac{2}{3} \tilde{A}_\mu \tilde{A}_\nu \tilde{A}_\rho \right) \right. \\ &\quad + (-D_\mu \bar{\Phi}^\alpha D^\mu \Phi_\alpha + i \bar{\Psi}^\alpha \not{D} \Psi_\alpha) - i \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \Phi_\alpha \bar{\Psi}_\beta \Phi_\gamma \bar{\Psi}_\delta + i \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \bar{\Phi}^\alpha \Psi^\beta \bar{\Phi}^\gamma \Psi^\delta \\ &\quad + i \left(-\bar{\Psi}_\beta \Phi_\alpha \bar{\Phi}^\alpha \Psi^\beta + \Psi_\beta \bar{\Phi}_\alpha \Phi^\alpha \bar{\Psi}^\beta + 2 \bar{\Psi}_\alpha \Phi_\beta \bar{\Phi}^\alpha \Psi^\beta - 2 \Psi^\beta \bar{\Phi}^\alpha \Phi_\beta \bar{\Psi}_\alpha \right) \\ &\quad \left. + \frac{1}{3} \left(\Phi_\alpha \bar{\Phi}^\beta \Phi_\beta \bar{\Phi}^\gamma \Phi_\gamma \bar{\Phi}^\alpha + \Phi_\alpha \bar{\Phi}^\alpha \Phi_\beta \bar{\Phi}^\beta \Phi_\gamma \bar{\Phi}^\gamma + 4 \Phi_\beta \bar{\Phi}^\alpha \Phi_\gamma \bar{\Phi}^\beta \Phi_\alpha \bar{\Phi}^\gamma - 6 \Phi_\gamma \bar{\Phi}^\gamma \Phi_\beta \bar{\Phi}^\alpha \Phi_\alpha \bar{\Phi}^\beta \right) \right] \end{aligned} \quad (32)$$

で与えられます。 A_μ と \tilde{A}_μ は $U(N)$ ゲージ場です。 Φ_α はボソニック、 Ψ_α はフェルミオニックな bifundamental 表現²⁴の物質場で ($\alpha = 1, 2, 3, 4$)、共変微分は $D_\mu \Phi = \partial_\mu \Phi - i A_\mu \Phi + i \tilde{\Phi} \tilde{A}_\mu$ 、 $D_\mu \Psi = \partial_\mu \Psi - i A_\mu \Psi + i \tilde{\Psi} \tilde{A}_\mu$ という作用をします。ヤンミルズだと結合定数が次元を持ってしまうので、チャーン・サイモン理論と物質場を結合させている事に注意して下さい。結合定数 k はレベルと呼ばれ、自然数に量子化されています。 $k = 1$ の時が上で述べた $AdS_4 \times S^7$ 時空上の理論に対応し、一般の k では $AdS_4 \times S^7/\mathbb{Z}_k$ 上の M 理論を記述すると考えられています²⁵。

ABJM 理論の場合も、ゲージ/重力対応はあくまで予想に過ぎません。この予想の正当性を確認するためには、重力側とゲージ理論側で対応する量を計算して比較する必要があります。一番簡単な量として、ゲージ理論の自由エネルギー $F = -\log Z$ (Z は分配関数) を考えましょう。重力側で M2 プレーン解を使って計算すると、 $F \sim \sqrt{k} N^{3/2}$ となります (もちろん、比例係数も計算出来ます)。これを ABJM 理論を解いて導出できるでしょうか？

厄介な事に、ABJM 理論は格子正則化と相性がよくありません。そもそも、チャーン・サイモン理論をどうやったら格子に載せられるかも、長年研究されて入るものの決着がついていません。ラージ N 極限では江口-川合等価性を用いた正則化が可能ですが [47]、江口-川合等価性はトーフト極限 ($\lambda = N/k$ を固定) でのみ証明されており、M 理論を表すと期待される $N \ll k^5$ で成立するかは

²² 共形不変であるためには次元を持つパラメーターが存在しないことが最低条件ですが、 $(2+1)$ 次元の極大超対称ヤンミルズ理論では結合定数 g_{YM} が (質量)^{1/2} の次元を持ってしまいます。

²³ この理論は D2 プレーンを記述しています。スカラー場が7つあるので、10次元時空中で D2 プレーンと直交する7次元を記述出来ます。M2 プレーンを記述するには一つ足りません。

²⁴ Google で検索すると二重基本表現という訳が出てきましたが、初耳です。

²⁵ S^7 は複素射影空間 CP^3 に S^1 をファイバーしたもので、 \mathbb{Z}_k は CP^3 には作用せずに $S^1 \rightarrow S^1/\mathbb{Z}_k$ というふうにファイバーに作用します。 k があまりにも大きいと ($k^5 \gtrsim N$ になると) S^1/\mathbb{Z}_k が 11 次元のプランクスケールよりも小さくなってしまい、量子重力の効果が重要になります。 $N \gg k^5$ では 11 次元超重力理論による古典的な記述が良い近似になります。 k をもっと大きくすると、 S^1/\mathbb{Z}_k が一点に潰れてしまい、背景時空が 10 次元 ($AdS_4 \times CP^3$) になって、IIA 型超弦理論による記述が妥当になります。 $k \ll N \ll k^5$ では IIA 型超重力理論が良い近似を与えます。なお、 $\lambda \equiv N/k$ を固定した極限ではトーフトの $1/N$ 展開が可能です。

分かりません²⁶。更に、チャーン・サイモン項をユークリッド化すると、作用が純虚数になってしまいます。従って、リウエイティング法も使えません²⁷。

そこで、局所化法 (localization method) [49, 50] という手法に着目します。この手法は ABJM 理論以外にも適用可能なので、一般的な作用 $S[\phi]$ を考えます。(ϕ はボソニック、フェルミオニック問わず一般的な場を表すとします。) この理論の分配関数

$$Z = \int [d\phi] e^{-S[\phi]} \quad (33)$$

を計算するのが目標です。作用 $S[\phi]$ と経路積分のメジャー $[d\phi]$ が超対称チャージ Q のもとで不変だと仮定すると、作用の 1-パラメーター変形

$$S_t \equiv S + tQV \quad (V \text{ は任意のフェルミオニック関数}) \quad (34)$$

のもとで分配関数が不変である事が示せます。即ち、 $Z_t \equiv \int [d\phi] e^{-S_t}$ として、

$$\frac{d}{dt} Z_t = \int [d\phi] (QV) e^{-S-tQV} = \int [d\phi] Q (V e^{-tQV}) e^{-S} = Z \times \langle Q(V e^{-tQV}) \rangle = 0 \quad (35)$$

なので、 Z_t は t に依らず一定になります²⁸。(二カ所目の変形では $Q^2 = 0$ を用いました。また、最後の変形では Q が真空に作用するとゼロになることを用いました。) そこで、 QV が正定値のポテンシャルを与えるように V をうまく選んで、 t の値を大きくしていってみましょう。すると、作用に余分に付け加わった tQV というポテンシャル項の寄与がどんどん大きくなるので、 $QV = 0$ となる場の配位の周りしか経路積分に寄与しなくなります。即ち、経路積分がこの様な配位の周りに「局所化」します。 $t \rightarrow \infty$ の極限では、 $QV = 0$ の周りの 1-ループ計算で厳密な値が得られます。従って、 V をうまく選べば、分配関数の計算が簡単になります²⁹。もちろん、どんな V を選べばいいのかを見切るには心眼が必要なわけですが、世の中には凄い人達がいるもので、対称性の高い理論については、僕のような素人にはどこから降って来たのか分からない V を用いて綺麗な表式が導かれています。例えば 4 次元極大超対称ゲージ理論の場合には、局所化した後の理論は単なるガウシアン行列模型になります [49]。ABJM の場合は次のような「ABJM 行列模型」にまで落とせます [50]:

$$Z^{\text{ABJM}} = \frac{1}{(N!)^2} \int \frac{d^N \mu}{(2\pi)^N} \frac{d^N \nu}{(2\pi)^N} \frac{\prod_{i<j} \left(2 \sinh \frac{\mu_i - \mu_j}{2}\right)^2 \left(2 \sinh \frac{\nu_i - \nu_j}{2}\right)^2}{\prod_{i,j} \left(2 \cosh \frac{\mu_i - \nu_j}{2}\right)^2} \exp \left[\frac{ik}{4\pi} \sum_{i=1}^N (\mu_i^2 - \nu_i^2) \right]. \quad (36)$$

これは単なる $2N$ 変数積分ですが、被積分関数が正定値でないので、モンテカルロ法とは相性がよくありません (負符号問題)。しかし、これを解析的に変形して正定値関数の N 変数積分に直せます:

$$Z^{\text{ABJM}} = \frac{1}{2^N N!} \int \frac{d^N x}{(2\pi k)^N} \frac{\prod_{i<j} \tanh^2 \left(\frac{x_i - x_j}{2k}\right)}{\prod_i 2 \cosh \left(\frac{x_i}{2}\right)} \quad (37)$$

²⁶最近になって、M 理論に対応するラージ N 極限でも江口-川谷等価性が成り立っているらしいことが分かってきました。詳細は [48] を参照して下さい。

²⁷物質場 Φ_α, Ψ_α の寄与は純虚数ではないので、物質場の部分だけでシミュレーションをしておいてチャーン・サイモン項の効果をリウエイティングで取込む事は可能かも知れません。

²⁸正確に言うと遠方での振る舞いが良い変形に限るといった条件が付きます。興味のある方は原論文を参照して下さい。

²⁹ Q -不変な演算子についても同じ議論が出来ます。

これはモンテカルロ法で簡単に計算できます。トーフト極限の周りでの弦理論の摂動展開 (ABJM 理論の $1/N$ 展開) [51, 52] と、ラージ N かつ $k \ll 1$ での k 展開 [53]³⁰ は既に解析的に調べられていたのですが、 $k = 1, 2, 3, \dots$ で $N^{3/2}$ 則が成り立っているのか、M 理論的な極限と IIA 型超弦理論的な極限はどのようにつながっているのか、非摂動的な効果はどの程度効いているのか、といった様々な疑問がありました。論文 [54] では実際に様々な N, k での自由エネルギーの値をモンテカルロ法で計算し、 $k = 1, 2, 3, \dots$ で $N^{3/2}$ 則が成り立つこと、M 理論的な極限と IIA 型超弦理論的な極限、さらにはその中間的な領域も同じ関数形で統一的に記述出来ること、非摂動効果はかなり小さい事などが分かりました。その後、解析的な計算手法が発展し、様々な N と k で自由エネルギーの値が解析的に求められ、非摂動効果の詳細が調べられています (例えば [55, 56] を参照して下さい)。

5 まとめと展望

僕が大学院に入った頃には、超対称ゲージ理論のモンテカルロシミュレーションは不可能だと言われていて、格子上の超対称性の研究をしている人達は奇人変人扱いされていました。(少なくとも、僕の目には、そういう扱いを受けていると映りました。)ところが、その後の 10 年間で目覚ましい発展があり、今やゲージ/重力対応の定量的な検証やゲージ理論側から重力側への予言が出来る段階に入っています。

この流れを更に発展させ、より面白い物理を見出していくためには、何が重要でしょうか。まず始めに思いつくのは

- 弦理論屋さんと協力して、現実的な計算機資源で検証可能な面白い物理を探す

ことです。ゲージ/重力対応の検証は重要ですが、予想されていた事を確認するだけでは芸がありません。ゲージ理論のシミュレーションで初めて可能な物理を調べ、超弦理論に新しい知見を与えていかなければなりません。そのためには、

- シミュレーション可能なゲージ理論のクラスを広げる

ことも重要です。これは僕自身の反省でもあるのですが、弦理論屋さんとはとてもシミュレーション出来ないような問題ばかりもちかけがちですし、シミュレーションする側は「そんなの出来るわけ無いだろう」というリアクションで弦理論屋さんの夢を壊してしまいがちです。男女関係と同じで、お互いが歩み寄る努力も時として重要です。

シミュレーション可能なクラスを広げるという意味では、

- 超対称 QCD のファインチューニングが不要な正則化を与える

ことが最優先かも知れません。これが出来れば現象論に興味のある人達が参入してくるのは間違いなく、それが刺激となってより一層の発展が見込めます。また、この分野がなかなか流行らない理由の一つに、シミュレーションコードを全て自分で書かなければならないという事があります。どんな分野でも、自分でコードを書くだけの忍耐力がある人は非常に稀ですので、誰でも気軽に遊べるようにするためには

³⁰元々の ABJM 理論では k は自然数でなければならなかったのですが、ABJM 行列模型は k が必ずしも整数でなくても意味を成します。

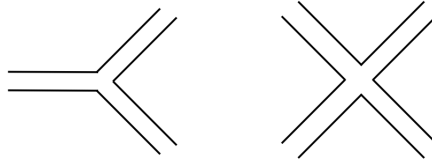


図 14: ゲージ粒子の三点相互作用と四点相互作用。

- 誰でも自由に使える汎用性の高いシミュレーションコードを作り、無償で配布する必要があります。また、配布するからにはちゃんとしたものを作らないと恥ずかしいので、
 - 格子 QCD をはじめとする数値シミュレーションの専門家に参入してもらって、アルゴリズムやコードの改良を進める
- ことも重要です。また、ちょっと大きな夢になりますが、
- $(0+1)$ 次元の理論だけでもいいので、実時間での性質を調べる
- ことが出来るようになれば、ブラックホールの研究に革命を起こせます。この他にも色々ありますが、とりあえずここまでにしましょう。

謝辞

この集中講義をする機会を与えて下さった素核宇宙融合レクチャーシリーズの世話人の方々、特にレクチャーノート提出の締め切りを一年近く過ぎてしまったにも関わらず忘れたふりをして（あるいは本当に忘れて？）³¹ にこやかに接して下さい下さった青木慎也さんに感謝します。また、講義の元となった論文の共著者の方々、議論に付き合ってくれた下さった方々、原稿に眼を通して有益なコメントを下された方々（特に青木さん、伊藤祐太さん、杉野文彦さん、松浦壮さん）に感謝します。

限られた時間での初心者向けの講義だったので、説明を適宜簡略化したり、重要な結果を省略したりせざるを得ませんでした。紹介しきれなかった重要な論文の著者のみなさま、ご容赦ください。

A トーフット流の $1/N$ 展開と g_s 展開の対応

簡単のために、ゲージ場のみ考えましょう。スカラーやフェルミオンを入れても議論はほとんど変わりません。

$U(N)$ ゲージ理論では、ゲージ場 A_μ は $N \times N$ のエルミート行列で表されます。行列には二つの足があるので、プロパゲーターは二重線で表されます。相互作用には、図 14 に描いてあるような三点と四点のものがああります。これらを組み合わせてファインマン図形を描くと、例えば図 15 の実

³¹忘れていなかったそうです。

線で示したもののようになります。この網の目から、点線で書いたような三角形と四角形の組み合わせが得られます。即ち、ファインマン図形から、曲面の三角形と四角形による分割が得られます。ファインマン図形の三点（四点）相互作用点ごとにそれを取り囲む三角形（四角形）があり、各プロパゲーターに対してそれと交わる三角形/四角形の辺が一意的に決まっている事に注意して下さい。

トフーフトのアイデアは、ファインマン図形を足し上げれば、色々な形の世界面が、弦理論として自然な重みで足し上げられるというものです。これを理解するために、ファインマン図形の N 依存性を調べましょう。ファインマンルールに立ち返ると、 $\lambda = g_{YM}^2 N$ が N に依存しない時には、相互作用点から N 、行列の添字の閉ループから N 、プロパゲーターから N^{-1} という因子が現れる事が分かります。これを三角形と四角形による分割のコトバに翻訳すると、次のようになります：

ファインマン図形	三角形と四角形による分割	N の次数
三点相互作用点	三角形	N
四点相互作用点	四角形	N
行列の足の閉ループ	頂点	N
プロパゲーター	辺	N^{-1}

(38)

この関係式を用いると、 N 依存性は

$$N^{(\text{三角形と四角形の数}) - (\text{辺の数}) + (\text{頂点の数})} = N^{2-2g} \quad (39)$$

となります。ここで、 $2-2g$ はオイラー数で、 g は図 4 にあるような穴の数 (genus) です。従って、ゲージ理論の $1/N^2$ 展開が、超弦理論の摂動展開と自然に対応しています。ゲージ理論は $1/N$ 展開に依存せずに非摂動的に定式化できるので、ある種のゲージ理論が超弦理論の非摂動的な定式化を与えるのではないかと予想されるわけです。

B 極大超対称ヤンミルズ理論

この章では、極大超対称ゲージ理論を簡単に説明します。「極大」というのは、超対称チャージが (マヨラナで数えて) 16 個あるという意味です。マヨラナで 16 自由度あると、スピンを $1/2$ 上げる生成子が 4 つ作れます。従って、理論に現れる場のスピンをちょうど -1 から $+1$ に収める事が出来ます。もしこれ以上超対称性を入れると、スピンの $3/2$ のグラビティーノやスピンの 2 の重力子を理論に導入しなければならなくなってしまい、一般座標変換不変性まで要求しなければならなくなって、普通のゲージ理論は作れなくなってしまいます。この意味で、超対称チャージが 16 個の理論は「極大」超対称性を持つと言います。

超対称性はスピノールの表現と密接に関係しています。(9+1)次元のマヨラナ-ワイル表現はちょうど 16 自由度で、(9+1)次元で一番小さな超対称変換を構成すると自動的に極大超対称ゲージ理論が得られます^{32,33}。もっと低い次元での極大超対称ゲージ理論は、(9+1)次元の理論を次元縮約すれば得られます。

³²従って、これより高い次元では超対称ゲージ理論は作れません。

³³(3+1)より上の次元ではきちんと量子化出来るかどうかは分かりません。最近、(4+1)次元では量子論的に意味のある理論になっているのではないかと提案が成されています [57]。

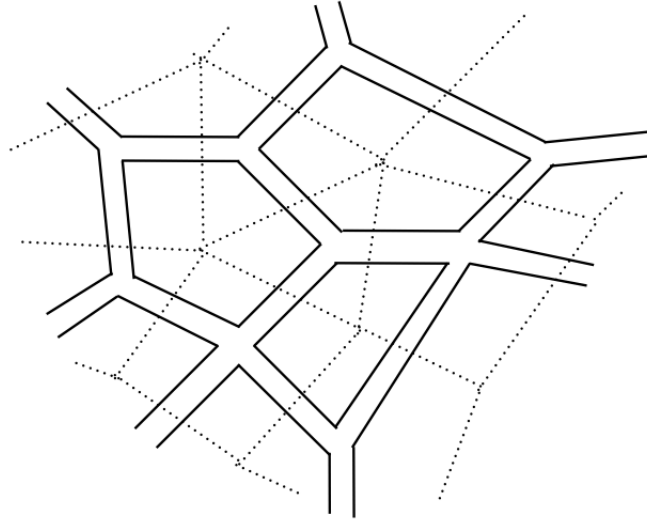


図 15: ゲージ粒子ファインマン図 (実線) と、三角形と四角形での世界面の分割 (点線) の対応。

(9 + 1) 次元の理論の作用³⁴は

$$S_{(9+1)} = -\frac{1}{g_{YM}^2} \int d^{10}x \text{Tr} \left(\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + \frac{i}{2} \bar{\psi} \not{D} \psi \right) \quad (40)$$

で与えられます。ただし $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - i[A_\mu, A_\nu]$ で、ゲージ場 A_μ の添字 μ は 0 から 9 を走ります。(ユークリッド化した場合は 1 から 10 です。) ψ はアジョイント表現のマヨラナ-ワイルフェルミオンで、 ψ に作用するディラック演算子 \not{D} は $\not{D}\psi \equiv \gamma^\mu D_\mu \psi \equiv \gamma^\mu (\partial_\mu \psi - i[A_\mu, \psi])$ で定義されます。 γ_μ は (9 + 1) 次元のガンマ行列で、 32×32 行列なのですが、 ψ は 16 成分しかない (左巻きの 16 成分だけでマヨラナ-ワイルになっていて、右巻きの 16 成分はゼロに取る) ので、実質的には 16×16 です。

超対称変換は

$$\delta_\epsilon A_\mu = i\bar{\epsilon}\gamma_\mu\psi, \quad \delta_\epsilon\psi = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}\gamma^{\mu\nu}\epsilon \quad (41)$$

で与えられます。作用が超対称変換のもとで不変であることを示すには、(9 + 1) 次元のガンマ行列の特殊な性質を用いる必要があります。また、超対称変換の交換子は

$$[\delta_\epsilon, \delta_\eta] = 2i(\bar{\eta}\gamma_\mu\epsilon)\partial^\mu + (\text{ゲージ変換}) \quad (42)$$

となっています。右辺は無限小並進を含んでいるので、格子上では超対称性が完全には保てません。

³⁴ゲージ群は何でもいいのですが、このノートでは $U(N)$ を考えます。

参考文献

- [1] M. Hanada, Y. Hyakutake, J. Nishimura and S. Takeuchi, Phys. Rev. Lett. **102**, 191602 (2009).
- [2] M. B. Green, J. H. Schwarz and E. Witten, Cambridge, Uk: Univ. Pr. (1987) 469 P. (Cambridge Monographs On Mathematical Physics)
M. B. Green, J. H. Schwarz and E. Witten, Cambridge, Uk: Univ. Pr. (1987) 596 P. (Cambridge Monographs On Mathematical Physics)
- [3] J. Polchinski, Cambridge, UK: Univ. Pr. (1998) 402 p
J. Polchinski, Cambridge, UK: Univ. Pr. (1998) 531 p
- [4] G. W. Gibbons and K. -i. Maeda, Nucl. Phys. B **298**, 741 (1988).
- [5] G. T. Horowitz and A. Strominger, Nucl. Phys. B **360**, 197 (1991).
- [6] J. Polchinski, Phys. Rev. Lett. **75**, 4724 (1995).
- [7] E. Witten, Nucl. Phys. B **460**, 335 (1996) [hep-th/9510135].
- [8] J. M. Maldacena, Adv. Theor. Math. Phys. **2**, 231 (1998).
- [9] N. Izhaki, J. M. Maldacena, J. Sonnenschein and S. Yankielowicz, Phys. Rev. D **58**, 046004 (1998).
- [10] K. N. Anagnostopoulos, M. Hanada, J. Nishimura and S. Takeuchi, Phys. Rev. Lett. **100**, 021601 (2008).
- [11] D. B. Kaplan, Phys. Lett. B **136**, 162 (1984); G. Curci and G. Veneziano, Nucl. Phys. B **292**, 555 (1987).
- [12] D. B. Kaplan, E. Katz and M. Unsal, JHEP **0305**, 037 (2003).
- [13] F. Sugino, JHEP **0401**, 015 (2004);
- [14] I. Kanamori and H. Suzuki, Nucl. Phys. B **811**, 420 (2009).
- [15] M. Hanada and I. Kanamori, Phys. Rev. D **80**, 065014 (2009).
- [16] M. Hanada and I. Kanamori, JHEP **1101**, 058 (2011).
- [17] T. Eguchi and H. Kawai, “Reduction of Dynamical Degrees of Freedom in the Large N Gauge Theory,” Phys. Rev. Lett. **48**, 1063 (1982).
- [18] H. S. Snyder, Phys. Rev. **71**, 38 (1947).

- [19] G. Bhanot, U. M. Heller and H. Neuberger, “The Quenched Eguchi-Kawai Model,” *Phys. Lett. B* **113**, 47 (1982).
- [20] A. Gonzalez-Arroyo and M. Okawa, “The Twisted Eguchi-Kawai Model: A Reduced Model for Large N Lattice Gauge Theory,” *Phys. Rev. D* **27**, 2397 (1983).
- [21] T. Ishii, G. Ishiki, S. Shimasaki and A. Tsuchiya, *Phys. Rev. D* **78**, 106001 (2008).
- [22] H. Aoki, N. Ishibashi, S. Iso, H. Kawai, Y. Kitazawa and T. Tada, “Noncommutative Yang-Mills in IIB matrix model,” *Nucl. Phys. B* **565**, 176 (2000) [hep-th/9908141].
- [23] M. Hanada, J. Nishimura and S. Takeuchi, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 161602 (2007).
- [24] S. Catterall and T. Wiseman, *Phys. Rev. D* **78**, 041502 (2008).
- [25] S. Catterall and T. Wiseman, *JHEP* **1004**, 077 (2010).
- [26] J. M. Maldacena, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 4859 (1998).
- [27] S. -J. Rey and J. -T. Yee, *Eur. Phys. J. C* **22**, 379 (2001).
- [28] M. Hanada, A. Miwa, J. Nishimura and S. Takeuchi, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 181602 (2009).
- [29] S. S. Gubser, I. R. Klebanov and A. M. Polyakov, *Phys. Lett. B* **428**, 105 (1998).
- [30] E. Witten, *Adv. Theor. Math. Phys.* **2**, 253 (1998).
- [31] Y. Sekino and T. Yoneya, *Nucl. Phys. B* **570**, 174 (2000).
- [32] M. Hanada, J. Nishimura, Y. Sekino and T. Yoneya, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 151601 (2010).
- [33] M. Hanada, J. Nishimura, Y. Sekino and T. Yoneya, *JHEP* **1112**, 020 (2011).
- [34] S. Catterall, A. Joseph and T. Wiseman, *JHEP* **1012**, 022 (2010).
- [35] M. Honda, G. Ishiki, S. -W. Kim, J. Nishimura and A. Tsuchiya, *PoS LATTICE* **2010** (2010) 253;
- [36] M. Honda, G. Ishiki, J. Nishimura and A. Tsuchiya, *PoS LATTICE* **2011**, 244 (2011).
- [37] S. Catterall, E. Dzienkowski, J. Giedt, A. Joseph and R. Wells, *JHEP* **1104**, 074 (2011) [arXiv:1102.1725 [hep-th]].
- [38] S. Catterall, P. H. Damgaard, T. Degrand, R. Galvez and D. Mehta, arXiv:1209.5285 [hep-lat].
- [39] M. Hanada, S. Matsuura and F. Sugino, *Prog. Theor. Phys.* **126**, 597 (2011); M. Hanada, *JHEP* **1011**, 112 (2010).

- [40] J. M. Maldacena, M. M. Sheikh-Jabbari and M. Van Raamsdonk, *JHEP* **0301**, 038 (2003).
- [41] D. Berenstein, *JHEP* **0601**, 125 (2006).
- [42] D. Berenstein, R. Cotta and R. Leonardi, *Phys. Rev. D* **78**, 025008 (2008).
- [43] E. Bergshoeff, E. Sezgin and P. K. Townsend, *Phys. Lett. B* **189**, 75 (1987).
- [44] B. de Wit, J. Hoppe and H. Nicolai, *Nucl. Phys. B* **305**, 545 (1988).
- [45] T. Banks, W. Fischler, S. H. Shenker and L. Susskind, *Phys. Rev. D* **55**, 5112 (1997) [[hep-th/9610043](#)].
- [46] O. Aharony, O. Bergman, D. L. Jafferis and J. Maldacena, *JHEP* **0810**, 091 (2008).
- [47] M. Hanada, L. Mannelli and Y. Matsuo, *JHEP* **0911**, 087 (2009).
G. Ishiki, S. Shimasaki and A. Tsuchiya, *Nucl. Phys. B* **834**, 423 (2010).
- [48] T. Azeanagi, M. Fujita and M. Hanada, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 121601 (2013).
- [49] V. Pestun, *Commun. Math. Phys.* **313**, 71 (2012).
- [50] A. Kapustin, B. Willett and I. Yaakov, *JHEP* **1003**, 089 (2010).
- [51] N. Drukker, M. Marino and P. Putrov, *Commun. Math. Phys.* **306**, 511 (2011); *JHEP* **1111**, 141 (2011).
- [52] H. Fuji, S. Hirano and S. Moriyama, *JHEP* **1108**, 001 (2011);
- [53] M. Marino and P. Putrov, *J. Stat. Mech.* **1203**, P03001 (2012).
- [54] M. Hanada, M. Honda, Y. Honma, J. Nishimura, S. Shiba and Y. Yoshida, *JHEP* **1205**, 121 (2012).
- [55] Y. Hatsuda, S. Moriyama and K. Okuyama, *JHEP* **1210**, 020 (2012); P. Putrov and M. Yamazaki, *Mod. Phys. Lett. A* **27**, 1250200 (2012).
- [56] Y. Hatsuda, S. Moriyama and K. Okuyama, [arXiv:1211.1251](#) [[hep-th](#)].
- [57] M. R. Douglas, *JHEP* **1102**, 011 (2011).
N. Lambert, C. Papageorgakis and M. Schmidt-Sommerfeld, *JHEP* **1101**, 083 (2011).