

銀河形成とダークマター

岡本 崇

(北海道大学大学院理学研究院／筑波大学数理物質系)

1 はじめに

本講義ではまず、標準的な宇宙モデルとなったコールドダークマターモデルのもとでの構造形成について、主に線形理論を用いて物質優勢期を中心に基本的な概念を説明する。次に、この標準宇宙モデルに対して銀河形成理論が抱える困難についていくつかのシミュレーション結果とともに紹介する。最後に、それらの問題が、ガスや星といった「バリオン」の物理を考慮することによりどのように解決されるのかを解説する、のだが、この講義ノートは今のところ前半部分のみである。

2 一様等方宇宙

Einstein 方程式,

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad (1)$$

Robertson-Walker metric,

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a(t)^2 \left(\frac{dr^2}{\sqrt{1-Kr^2}} + r^2 d\Omega^2 \right), \quad (2)$$

を用いて

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \rho - \frac{Kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda c^2}{3} \quad (3)$$

と,

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda c^2}{3} \quad (4)$$

を得る。ここで ρ はエネルギー密度である。

$K = 0, \Lambda = 0$ の宇宙 (Einstein-de Sitter universe) の平均エネルギー密度は, eq. (3) より,

$$\rho_c \equiv \frac{3c^2 H^2}{8\pi G} \quad (5)$$

である. 宇宙論パラメータを

$$\Omega \equiv \frac{\rho}{\rho_c} = \frac{8\pi G}{3c^2 H^2} \rho, \quad (6)$$

$$\Omega_k \equiv \frac{c^2 K}{H^2 a^2}, \quad (7)$$

$$\Omega_\Lambda \equiv \frac{c^2 \Lambda}{3H^2}, \quad (8)$$

$$q \equiv -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} \quad (9)$$

と定義すると, eq. (3) は

$$\Omega - \Omega_k + \Omega_\Lambda = 1 \quad (10)$$

のように書け, また減速パラメータは,

$$q = \frac{1}{2} \left(1 + 3 \frac{p}{\rho} \right) \Omega - \Omega_\Lambda \quad (11)$$

となる. recombination 以降を考える場合, ダスト近似が可能であり $p = 0$ とおける. 現在の値を用いて eq (10) を書き直すと,

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{\Omega_0}{a^3} - \frac{\Omega_{k,0}}{a^2} + \Omega_{\Lambda,0} \quad (12)$$

となり, それぞれ a^{-3} , a^{-2} , と a^0 の依存性を持つことに注意*1.

3 共動座標系

宇宙は膨張しているため, 宇宙膨張とともに変化する共動 (comoving) 座標系を用いるのが便利である. 以下では Horizon スケール以下を扱うので Newton 近似を用いる. また, 以降 ρ は物質密度を表す (エネルギー密度/ c^2) ものとする. また, 簡単のために宇宙定数も考えない*2. 流体近似を用いると,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} = 0, \quad (13)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla \Psi - \frac{\nabla p}{\rho}, \quad (14)$$

$$\Delta \Psi = 4\pi G \rho. \quad (15)$$

Euler 方程式を Lagrange 形式で書くと

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{v}, \quad (16)$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \Psi \quad (17)$$

$$(18)$$

*1 $\rho = \rho_m + \rho_r$ と, 物質と輻射に分けてやると, $\rho_r \propto a^{-4}$ より, $\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{\Omega_{m,0}}{a^3} + \frac{\Omega_{r,0}}{a^4} - \frac{\Omega_{k,0}}{a^2} + \Omega_{\Lambda,0}$.

*2 Λ 入りの場合は Poisson 方程式が $\Delta \Psi = 4\pi G \rho - \Lambda c^2$ となる.

と書けることに注意. comoving 座標系

$$\mathbf{r}(t) = a(t)\mathbf{x}, \quad (19)$$

$$\mathbf{v}(t, \mathbf{r}) = \dot{a}\mathbf{x} + a\dot{\mathbf{x}} \equiv H\mathbf{r} + \mathbf{u}, \quad (20)$$

を導入し, 座標変換

$$\nabla_r \rightarrow \frac{1}{a}\nabla_x, \quad (21)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_r \rightarrow \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_x - \frac{\dot{a}}{a}\mathbf{x} \cdot \nabla_x \quad (22)$$

$$(23)$$

を適用することにより (以下添字のない偏微分は x での偏微分) 連続の方程式は,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho + \frac{1}{a}\nabla \cdot (\rho\mathbf{u}) = 0 \quad (24)$$

そして運動方程式は $\partial x / \partial t = 0$ に注意し,

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t}(\dot{a}\mathbf{x} + \mathbf{u}) + \frac{\mathbf{u}}{a} \cdot \nabla(\dot{a}\mathbf{x} + \mathbf{u}) \\ &= \ddot{a}\mathbf{x} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\dot{a}}{a}\mathbf{u} + \frac{\mathbf{u}}{a} \cdot \nabla \mathbf{u} \\ &= -\frac{\nabla p}{a\rho} - \frac{\nabla \Psi}{a} \end{aligned} \quad (25)$$

が得られる. comoving 座標系の重力ポテンシャル

$$\Phi \equiv \frac{\Psi}{a} + \frac{\ddot{a}}{2}x^2 \quad (26)$$

を導入し,

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + H\mathbf{u} + \frac{1}{a}\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{1}{a\rho}\nabla p - \nabla \Phi \quad (27)$$

のように書いても良い. 元のポテンシャルを使って, Poisson 方程式は,

$$\Delta \Psi = 4\pi G\rho a^2 \quad (28)$$

となる.

4 線形近似

それぞれの物理量に対して微小な摂動を考える.

$$\rho = \bar{\rho} + \rho_1 \quad (29)$$

$$\mathbf{v} = \dot{a}\mathbf{x} + \mathbf{u} \quad (30)$$

$$\Psi = \Psi_0 + \phi \quad (31)$$

$$p = p_0 + p_1, \quad (32)$$

ここで $\bar{\rho}$ は宇宙の平均密度である.

4.1 Background

これらを eq. (24), (25), and (28) に代入し, まず零次の項を考えると,

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + 3H\bar{\rho} = 0, \quad (33)$$

$$\ddot{\mathbf{x}} = -\frac{1}{a}\nabla\Psi_0, \quad (34)$$

$$\Delta\Psi_0 = 4\pi G\bar{\rho}a^2 \quad (35)$$

となる. 連続の式は,

$$\frac{1}{a^3}\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}a^3) = 0 \quad (36)$$

と変形でき, 質量保存 (断熱膨張) を示している.

運動方程式は両辺に ∇ を作用させることにより,

$$3\ddot{\mathbf{u}} = -\frac{1}{a}\Delta\Psi_0 = -4\pi G\bar{\rho}a \quad (37)$$

となり, これは $p = 0, \Lambda = 0$ の場合の eq. (4) に一致する.

4.2 線形段階

密度がほぼ一様な状態 (宇宙初期) を考え, 一次の摂動を調べる. 密度コントラスト $\delta(\mathbf{x}, t) \equiv \rho_1/\bar{\rho}$ を定義し ($\rho = \bar{\rho}(1 + \delta)$), $\delta \ll 1$ を考える. 連続の式は

$$\frac{\partial \bar{\rho}(1 + \delta)}{\partial t} + 3H\bar{\rho}(1 + \delta) + \frac{1}{a}\nabla \cdot \{\bar{\rho}(1 + \delta)\mathbf{u}\} = (1 + \delta) \left(\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + 3H\bar{\rho} \right) + \bar{\rho}\frac{\partial \delta}{\partial t} + \frac{\bar{\rho}}{a}\nabla \cdot \mathbf{u} + \frac{\bar{\rho}}{a}\nabla \cdot (\delta\mathbf{u}) = 0,$$

ゼロ次の関係式 (33) を用い, 二次以上の摂動を無視することにより,

$$\begin{aligned} \bar{\rho}\frac{\partial \delta}{\partial t} + \frac{\bar{\rho}}{a}\nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \\ \frac{\partial \delta}{\partial t} + \frac{1}{a}\nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \end{aligned} \quad (38)$$

が得られる. 同様に運動方程式は, 二次以上の摂動を無視し, ゼロ次の関係式を用いることにより,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + H\mathbf{u} &= -\frac{1}{a\bar{\rho}}\nabla p_1 - \frac{1}{a}\nabla\phi \\ &= -\frac{1}{a}\nabla\frac{c_s^2\rho_1}{\bar{\rho}} - \frac{1}{a}\nabla\phi \\ &= -\frac{c_s^2}{a}\nabla\delta - \frac{1}{a}\nabla\phi \end{aligned} \quad (39)$$

となる. ここで

$$c_s^2 \equiv \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_S, \quad (40)$$

は音速の自乗であり,

$$p_1 = c_s^2 \rho_1 + \left. \frac{\partial p}{\partial S} \right|_{\rho} \delta S \quad (41)$$

となることに注意 (断熱揺らぎを考えているので $\delta S = 0$). Poisson 方程式は

$$\Delta \phi = 4\pi G \bar{\rho} \delta a^2. \quad (42)$$

eq. (39) に ∇ を作用させ, eq. (38) とその時間偏微分, eq. (42) を代入し δ のみの式

$$\ddot{\delta} = -2H\dot{\delta} + 4\pi G \bar{\rho} \delta + \frac{c_s^2}{a^2} \Delta \delta \quad (43)$$

を得る. これが δ に関する運動方程式である. 右辺第一項は宇宙膨張が摩擦項として効いていること, 第二項は重力による‘力’, 第三項は圧力によって揺らぎが上に凸の部分の成長が抑制されることを示している.

4.2.1 Jeans 波長

δ の平面波, $\exp(\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})$, に比例する成分について, 分散関係を導く (\mathbf{k} , λ は comoving). eq. (43) に代入すると,

$$\omega^2 + 2H\omega - 4\pi G \bar{\rho} + k^2 \frac{c_s^2}{a^2} = 0,$$

を得る. 密度揺らぎが不安定になるための条件は $\omega > 0$ なので, この条件は,

$$k^2 < k_J^2 = 4\pi G \bar{\rho} \frac{a^2}{c_s^2} = \frac{3}{2} \Omega H^2 \frac{a^2}{c_s^2}, \quad (44)$$

もしくは,

$$\lambda > \lambda_J = \frac{2\pi}{k_J} = \sqrt{\frac{\pi c_s^2}{G \bar{\rho} a^2}} \quad (45)$$

が得られる. Einstein-de Sitter では $H^2 = 8\pi G \bar{\rho}/3$ なので後者は,

$$\lambda > \lambda_J \simeq \frac{c_s}{aH} \quad (46)$$

である. $a\lambda > \frac{c_s}{c} l_H$ の揺らぎが成長できることがわかる. ここで $l_H \equiv c/H$ はホライズン長である. 輻射優勢では $c_s \simeq c/\sqrt{3}$ なのでホライズンより小さなスケールの揺らぎは成長できない. equal time から recombination までの間は宇宙初期にその熱速度が非相対論的なダークマターである, cold dark matter (CDM) を仮定すると $p = 0$ なので, ほぼ全てのスケールで CDM の揺らぎは成長できる. ただし, baryon に関しては圧力は輻射が支配しているため, $c_s^2 \propto a^{-1}$ となり, $\lambda_J \propto a^{-1/2}/\dot{a} \simeq \text{const.}$ となる. recombination 以降, baryon は自身の圧力 $p \propto \rho^{1+\gamma}$ を感じ, $c_s \propto \rho^{\gamma/2} \propto a^{-1}$, よって $\lambda_J \propto a^{-1/2}$ となる.

4.2.2 物質優勢期の密度揺らぎの線形成長

equal time 以降を考える. eq. (43) において $c_s = 0$ としたのが密度揺らぎの時間発展の方程式であり. 簡単のために Einstein-de Sitter universe を考える. まず, Einstein-de Sitter universe での $a(t)$ の振る舞いを調べておこう. eq. (3) に $\rho = \rho_c = \rho_{c,0}a^{-3} = 3H_0^2/(8\pi G a^3)$, $K = \Lambda = 0$ を代入することにより,

$$\dot{a}^2 = H_0^2 a^{-1} \quad (47)$$

が得られる. $a = At^\alpha$ として上式に代入し, $\alpha = 2/3$ 及び $A^3 = 9/4H_0^2$ を得る. 結局,

$$a = \left(\frac{9}{4}H_0^2\right)^{\frac{1}{3}} t^{\frac{2}{3}}, \quad (48)$$

$$H = \frac{2}{3}t^{-1} \quad (49)$$

となる. これらを用いると eq. (43) は,

$$\ddot{\delta} + \frac{4}{3}\dot{\delta}t^{-1} - \frac{2}{3}\delta t^{-2} = 0 \quad (50)$$

となる. $\delta \propto t^\alpha$ と仮定して代入すると,

$$\alpha = \frac{2}{3} \text{ and } -1 \quad (51)$$

の 2 つの解が得られ, 一般解は,

$$\delta(t) = C_1 t^{\frac{2}{3}} + C_2 t^{-1} \quad (52)$$

と 2 つのモードの重ね合わせで書ける. 第一項を growing mode, 第二項を decaying mode を呼ぶ. 一般に growing mode を $D(t)$ と書き, Einstein-de Sitter (もしくは十分に高赤方偏移) では, 上記のように $D(t) \propto a(t)$ となる*3.

Einstein-de Sitter 以外の場合も eq. (43) の解は解析的に求まり, growing mode, decaying mode はそれぞれ

$$D_+ \propto H \int_0^a \frac{da}{a^3 H^3}, \quad (53)$$

$$D_- \propto H \quad (54)$$

で与えられる. equal time 以後のハッブルパラメータ

$$H = H_0 \sqrt{\frac{\Omega_0}{a^3} + \Omega_{\Lambda,0} + \frac{1 - \Omega_0 - \Omega_{\Lambda,0}}{a^2}} \quad (55)$$

を代入すればゆらぎの線形成長の時間変化が得られる.

*3 なお, super horizon scale の揺らぎは相対論的取り扱いによって $D(t) \propto a^2$ となるが, 相対論抜きという方針から外れるので今回は扱わない.

4.3 特異速度場の線形成長

線形化した連続の式 eq. (38), Poisson 方程式 eq. (42), 及び, 線形段階での密度揺らぎの成長が $\dot{\delta} = \frac{\dot{D}}{D}\delta$ と書けることを利用し,

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = -\frac{\dot{D}}{D} \frac{\Delta\phi}{4\pi G\bar{\rho}a} \quad (56)$$

と書ける. Growth factor

$$f \equiv \frac{\dot{D}}{D} \frac{a}{\dot{a}} \simeq \Omega^{0.6} \quad (57)$$

を定義し,

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = -\frac{fH}{4\pi G\bar{\rho}a} \Delta\phi \quad (58)$$

と書いても良いが、別に分かりやすくはなっていない. これは以下のように簡単に積分できる.

$$\mathbf{u} = -\frac{\dot{D}}{D} \frac{\nabla\phi}{4\pi G\bar{\rho}a} + \nabla \times \boldsymbol{\omega}. \quad (59)$$

ここで特異速度場の回転成分 $\mathbf{u}_T \equiv \nabla \times \boldsymbol{\omega}$ の振る舞いを調べておく. 線形化したオイラー方程式 eq. (39) の rotation を取り, \mathbf{u} を代入すると,

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{u}_T + \frac{\dot{a}}{a} \nabla \times \mathbf{u}_T \quad (60)$$

を得る. この解は,

$$\mathbf{u}_T(t, \mathbf{x}) = \frac{\mathbf{U}_T(\mathbf{x})}{a(t)}; \quad \nabla \cdot \mathbf{U}_T = 0 \quad (61)$$

であり, $\nabla \times \boldsymbol{\omega}$ の項は decaying mode であることが分かり, 線形段階では無視しても良い. 結局, 特異速度の線形成長は growing mode だけを考慮して,

$$\mathbf{u} = -\frac{\dot{D}}{D} \frac{\nabla\phi}{4\pi G\bar{\rho}a} = -\frac{fH}{4\pi G\bar{\rho}a} \nabla\phi \quad (62)$$

となる*4.

4.3.1 準非線形段階: Zel'dovich approximation

$\delta \sim 1$ になると, もはや線形近似は使えず, 非線形効果を考慮する必要がある. 今までの議論はすべて Euler 座標 \mathbf{x} を用いて行っていたが, Lagrange 座標での近似は弱非線形段階 ($\delta < 3 \sim 4$) においてもかなり良い結果を与えることが知られている. これの first order が Zel'dovich approximation (Zel'dovich, 1970) である.

*4 銀河の大規模分布の赤方偏移歪み (redshift distortion) から \mathbf{u} と δ を求め, f を通じて $\Omega^{0.6}/b$ (b は linear bias) に制限をつけるという話に繋がる.

まず, Lagrange 座標 \mathbf{q} を導入することにより,

$$\mathbf{r} = a(t)[\mathbf{q} + b(t)\mathbf{s}(\mathbf{q})], \quad (63)$$

$$\text{i.e. } \mathbf{x}(t, \mathbf{q}) = \mathbf{q} + b(t)\mathbf{s}(\mathbf{q}) \quad (64)$$

と書ける. ここで \mathbf{q} としては grid 上に整然と並んだようなものを思い浮かべれば良い. $b(t)\mathbf{s}(\mathbf{q})$ は displacement を表し, \mathbf{s} は初期密度揺らぎによって与えられる. 特異速度 \mathbf{u} は

$$\mathbf{u}(t, \mathbf{q}) = a(t)\dot{\mathbf{x}}(t, \mathbf{q}) = a(t)\dot{b}(t)\mathbf{s}(\mathbf{q}) \quad (65)$$

と表される*5.

Deformation tensor,

$$\mathcal{D}_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = \delta_{ij} + b(t)\frac{\partial s_i}{\partial q_j} \quad (66)$$

を考える. 質量保存より,

$$\rho d^3x = \bar{\rho} d^3q. \quad (67)$$

従って密度の時間発展は,

$$\rho = \left| \frac{d^3x}{d^3q} \right|^{-1} \bar{\rho} \equiv |\mathcal{D}|^{-1} \bar{\rho} = \frac{\bar{\rho}}{\left| \delta_{ij} - b(t)\frac{\partial s_i}{\partial q_j} \right|} \quad (68)$$

で与えられる. この Jacobian, $|\mathcal{D}|$ は

$$|\mathcal{D}| = \prod_{i=1}^3 (1 - b\lambda_i) \quad (69)$$

となる. ここで λ_i は \mathcal{D} の固有値である. つまり $b(t)$ が大きくなるに従って, 固有値の大きい順, 即ち初期に潰れている方向にまず重力崩壊する. つまり膨張宇宙における構造形成は, シート, フィラメント, ノットの順に構造が作られることを意味する*6.

さて, $b(t)\mathbf{s}(\mathbf{q}) \ll 1$ に対して線形化することにより,

$$\rho = \bar{\rho}[1 - b\nabla_{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{s}] \quad (70)$$

を得る. つまり,

$$\delta = -b\nabla \cdot \mathbf{s}, \quad (71)$$

なので結局 $b(t) = D(t)$ である. $\mathbf{u} = a\dot{D}\mathbf{s}$ を線形化した連続の式 Eq. (38) に代入しても, 当然ながら $\nabla \cdot \mathbf{s} = -\delta/D$ を得る*7. ちなみにこれは一次元シート系の厳密解*8.

*5 前述したように \mathbf{u} は回転成分を含まない. $\mathbf{s} = \nabla\psi$ と, ポテンシャルを導入することによって陽にそれを表したりもする.

*6 本当は最初の orbit crossing が起こった時点 (ある \mathbf{q} での密度が ∞) で近似は破綻するのだが, それは言わない方向で.

*7 $\mathbf{s} = \nabla\psi$ とした場合, $\Delta\psi = -\delta/D$ という Poisson 方程式になっている.

*8 らしい.

この関係式はフーリエ変換

$$\delta(\mathbf{q}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \hat{\delta}(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}} d^3k, \quad (72)$$

$$\mathbf{s}(\mathbf{q}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \hat{\mathbf{s}}(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}} d^3k, \quad (73)$$

を行うことにより, $\nabla \times \mathbf{s} = 0$ より,

$$\hat{\mathbf{s}}(\mathbf{k}) = i \frac{\mathbf{k}}{k^2} \frac{1}{D} \hat{\delta}(\mathbf{k}) \quad (74)$$

という簡単な関係式になる*9.

4.4 非線形段階: 球対称解

揺らぎの成長の非線形段階 (collapse) を扱うためのモデルとして, 球対称解が存在する. 密度一定の半径 r , 質量 M の球対象な密度揺らぎを考える. 運動方程式は単純に,

$$\ddot{r} = -\frac{GM(< r)}{r^2}. \quad (75)$$

エネルギー保存より,

$$\frac{1}{2} \dot{r}^2 - \frac{GM(< r)}{r} = E = \text{const.} \quad (76)$$

$E < 0$ に対する解は cycloid 曲線で与えられ,

$$r = A^2(1 - \cos \theta), \quad (77)$$

$$t = \frac{A^3}{\sqrt{GM}}(\theta - \sin \theta). \quad (78)$$

一方, $E > 0$ に対しては,

$$r = A^2(\cosh \theta - 1), \quad (79)$$

$$t = \frac{A^3}{\sqrt{GM}}(\sinh \theta - \theta) \quad (80)$$

という解が得られる.

最終的に collapse して天体が形成される場合 ($E < 0$) を考える. 球殻内の密度は $\rho = 3M/(4\pi r^3)$ である. 背景密度として簡単のために Einstein-de Sitter の場合を考えると eq. (49) より $\bar{\rho} = 1/(6\pi G t^2)$ である. 密度揺らぎは, eq. (78) を代入することにより,

$$\delta(\theta) = \frac{\rho - \bar{\rho}}{\bar{\rho}} = \frac{9}{2} \frac{(\theta - \sin \theta)^2}{(1 - \cos \theta)^3} - 1 \quad (81)$$

*9 これを使って powerspectrum によって与えられた密度場から粒子分布と速度分布を生成して宇宙論的シミュレーションの初期条件を作るわけだが, 最近はそのら辺に落ちている public code を使う人が多い. 良い時代である.

を得る. これを $\theta \ll 1$ のとき, θ の最少次の項まで展開すると,

$$t_L = \frac{A^3}{6\sqrt{GM}}\theta^3, \quad (82)$$

$$\delta_L(\theta) = \frac{3}{20}\theta^2, \quad (83)$$

が得られる. この 2 式から密度揺らぎの線形成長は,

$$\delta_L(t) = \frac{3}{20} \left(\frac{6\sqrt{GM}t_L}{A^3} \right)^{\frac{2}{3}}. \quad (84)$$

球殻内の重力により, 膨張はやがて止まり宇宙膨張から切り離されて収縮に転じる. $\theta = \pi$ の時, r は最大となり (maximum expansion) この時期を turnaround と呼ぶ. この時期の δ は

$$\delta_{\text{ta}} = \frac{9\pi^2}{16} - 1 \simeq 4.5 \quad (85)$$

である. 一方, この時期の線形揺らぎの大きさも形式的に計算でき,

$$\delta_{L,\text{ta}} = \frac{3}{20} \left(\frac{6\sqrt{GM}t_{\text{ta}}}{A^3} \right)^{2/3} \simeq 1.06 \quad (86)$$

となる*10. つまりある redshift z_0 に揺らぎ $\delta_0 \ll 1$ を持つ領域は,

$$1 + z_{\text{ta}} = \frac{\delta_0}{\delta_{L,\text{ta}}}(1 + z_0) \quad (87)$$

となる z_{ta} に, maximum expansion に達することが分かる. 次に, r が再び 0 になる点 ($\rho = \infty$ and $\theta = 2\pi$) を collapse と定義すると, その時刻の線形揺らぎの大きさは,

$$\delta_{L,\text{c}} = \frac{3}{20}(12\pi)\frac{2}{3} \simeq 1.69 \quad (88)$$

となる. この値は後で使うことになるので覚えておくこと. この時, $\rho = \infty$ となって密度は形式的に発散するが, 実際には violent relaxation により, virial 平衡に達すると考えられる. この時の半径 r_{vir} を求めておく. なお, violent relaxation と virial 平衡に関しては後で解説する.

turnaround 時には運動エネルギーが 0 なので系の全エネルギーは単純に

$$E = -\frac{GM}{r_{\text{ta}}} \quad (89)$$

である. 一方, virial 平衡にある系は $2T + W = 0$ より,

$$E = T + W = \frac{1}{2}W = -\frac{1}{2}\frac{GM}{r_{\text{vir}}}. \quad (90)$$

*10 t_{ta} として, $t_L(\pi)$ ではなく, $t(\pi)$ を用いていることに注意

エネルギー保存より,

$$r_{\text{vir}} = \frac{1}{2} r_{\text{ta}} \quad (91)$$

となる. 結局球の密度は turnaround 時の 2^3 倍になり, 宇宙の平均密度は $\bar{\rho} = 1/(6\pi Gt^2)$, $t_c = 2t_{\text{ta}}$ より, turnaround 時の $1/4$ 倍になる. つまり,

$$\Delta_{\text{vir}} \equiv \frac{\rho}{\bar{\rho}} \Big|_{\text{vir}} = 32 \frac{\rho}{\bar{\rho}} \Big|_{\text{ta}} = 32(\delta_{\text{ta}} + 1) = 18\pi^2 \simeq 178. \quad (92)$$

これが Einstein-de Sitter universe^{*11} での virial overdensity である.

4.5 ダークハローの質量関数

せっかく球対称解を紹介したので, 質量 M の天体 (dark halos) の個数密度 $n(M)dM$ を見積もる Press-Schechter 理論 (Press & Schechter, 1974) を紹介する. その前に密度揺らぎの性質を整理しておく.

4.5.1 密度揺らぎの統計的性質

密度揺らぎ δ は, $\delta \ll 1$ (宇宙初期) では通常 random Gaussian 揺らぎであったと仮定する. 揺らぎの分散を $\sigma^2 = \langle \delta^2 \rangle$ とすると, 一点分布関数は

$$f(\delta)d\delta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{\delta^2}{2\sigma^2}\right) d\delta. \quad (93)$$

その Fourier 変換は, 以前も書いたように

$$\hat{\delta}(\mathbf{k}) = |\hat{\delta}(\mathbf{k})| e^{i\phi(\mathbf{k})} = \int \delta(\mathbf{x}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3x \quad (94)$$

振幅の自乗平均は, power spectrum と呼ばれ,

$$P(k) \equiv \langle |\hat{\delta}(\mathbf{k})|^2 \rangle, \quad (95)$$

$$\langle \hat{\delta}(\mathbf{k}) \hat{\delta}(\mathbf{k}')^* \rangle = (2\pi)^3 P(\mathbf{k}) \delta^D(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \quad (96)$$

と定義される. ここで $\langle \rangle$ は ensemble 平均を表す. 一様等方性を仮定すると $P(\mathbf{k}) = P(k)$ と書ける. 二体相関関数 $\xi(r) \equiv \langle \delta(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x}') \rangle$ とは Fourier 変換で

$$P(k) = \int \xi(r) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3x \quad (97)$$

と関係付けられる. random Gaussian field は $P(k)$ (もしくは $\xi(r)$) が与えられると一意的に分布が決まる.

^{*11} 残念ながら我々の宇宙は $\Omega_0 \neq 1$ and $\Omega_\Lambda > 0$ なのでこれをそのまま使うことはできない. 宇宙項がある場合等については例えば Nakamura & Suto (1997) を見よ. また fitting formula が例えば Somerville & Primack (1999) で与えられていたりもする. ちなみにどっちも Appendix.

4.5.2 Smoothed density field: 質量揺らぎ

密度揺らぎ $\delta(\mathbf{x})$ は紫外発散してしまうため, 特定の質量スケールの揺らぎを考えるために window function $W_M(\mathbf{x})$ を導入する. また $\int W_M(\mathbf{x})d^3x = 1$ とする. 以下の議論では球対称な window function を考え, smoothing scale R が質量 M の領域に相当するとする. つまり,

$$M \simeq \bar{\rho}R^3. \quad (98)$$

この時, mass scale M の揺らぎは,

$$\delta_M(\mathbf{x}) = \int W_M(\mathbf{x}' - \mathbf{x})\delta(\mathbf{x}')d^3x' \quad (99)$$

と表される.

Eq. (99) を Fourier 逆変換

$$\delta(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \hat{\delta}(\mathbf{k})e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}d^3k, \quad (100)$$

を用いて,

$$\begin{aligned} \delta_M(\mathbf{x}) &= \int W_M(\mathbf{x}' - \mathbf{x})\frac{1}{(2\pi)^3} \int \hat{\delta}(\mathbf{k})e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'}d^3k d^3x' \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \int W_M(\mathbf{x}' - \mathbf{x})e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'}d^3x' \hat{\delta}(\mathbf{k})d^3k \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \int W_M(\mathbf{y})e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{y}+\mathbf{x})}d^3y \hat{\delta}(\mathbf{k})d^3k \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \int W_M(\mathbf{y})e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{y}}d^3y \hat{\delta}(\mathbf{k})e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}d^3k \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \hat{W}(kR)\hat{\delta}(\mathbf{k})e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}d^3k \end{aligned} \quad (101)$$

と書ける. ここで,

$$\hat{W}(kR) = \int W_M(\mathbf{x})e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}d^3x \quad (102)$$

は window function の Fourier 変換^{*12}である. この smoothing をかけられた場で $\delta = \delta_c$ となる点が質量 M の天体 (ダークハロー) として collapse していると考えることができる.

良く用いられる window function は以下の 3 つである.

1. Top-hat filter

$$W_M(r) = \frac{3}{4\pi R^3}\theta\left(1 - \frac{r}{R}\right), \quad (103)$$

$$\hat{W}(kR) = \frac{3}{(kR)^3}[\sin(kR) - kR \cos(kR)]. \quad (104)$$

*12 と言いきるには e の肩の符号が微妙だが, 他に適当な呼び方も見つからない.

2. Gaussian filter

$$W_M(r) = \frac{1}{(2\pi R^2)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{r^2}{2R^2}\right), \quad (105)$$

$$\hat{W}(kR) = \exp\left(-\frac{k^2 R^2}{2}\right). \quad (106)$$

3. Sharp k -space filter

$$W_M(r) = \frac{1}{2\pi^2 r^3} [\sin(k_c r) - k_c r \cos(k_c r)], \quad (107)$$

$$\hat{W}(kR) = \theta(k_c - k), \quad (108)$$

where $k_c \simeq R^{-1}$.

4.5.3 Press-Schechter mass function

以上で大体準備は完了. Mass scale M での揺らぎの分散は,

$$\begin{aligned} \sigma(M)^2 \equiv \langle \delta_M^2 \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^6} \int \int \langle \hat{\delta}(\mathbf{k}) \hat{\delta}(\mathbf{k}')^* \rangle \hat{W}(kR) \hat{W}(k'R) e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}} d^3k d^3k' \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \int P(k) \delta^D(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \hat{W}(kR) \hat{W}(k'R) e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}} d^3k d^3k' \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \hat{W}(kR)^2 P(k) d^3k. \end{aligned} \quad (109)$$

$\delta_M \geq \delta_c$ の領域が mass scale M で collapse している. その出現確率は,

$$f(\delta_M \geq \delta_c) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(M)} \int_{\delta_c}^{\infty} \exp\left(-\frac{\delta_M^2}{2\sigma(M)^2}\right) d\delta_M. \quad (110)$$

しかし, この確率に対応する領域は同じ条件を満たすより大きな領域 ($M' > M$) の内側に含まれている領域も含んでいる. これを除く必要があるので, $M \sim M + dM$ の間の collapse している天体の個数密度を $n(M)dM$ とすると, mass scale M の collapse している天体の割合は,

$$\frac{Mn(M)}{\bar{\rho}} dM = f(\delta_M \geq \delta_c) - f(\delta_{M+dM} \geq \delta_c) \simeq -\frac{\partial f(\delta_M \geq \delta_c)}{\partial M} dM \quad (111)$$

$$= -\frac{\delta_c}{\sqrt{2\pi}\sigma(M)^2} \frac{\partial \sigma(M)}{\partial M} \exp\left(-\frac{\delta_c^2}{2\sigma(M)^2}\right) dM. \quad (112)$$

ここまでは $\delta > 0$ の領域しか考慮していない. 実際に定義域は $\delta < 0$ も含むので単純に右辺を 2 倍し*13,

$$n(M) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\bar{\rho}\delta_c}{M\sigma(M)^2} \frac{\partial \sigma(M)}{\partial M} \exp\left(-\frac{\delta_c^2}{2\sigma(M)^2}\right) \quad (113)$$

*13 え?

を得る。これが Press-Schechter (PS) mass function である。唐突に登場した factor 2 は cloud-in-cloud problem と呼ばれ, Peacock & Heavens (1990) や Bond et al. (1991) によって解決されるまで実に 25 年近くを要した。結論から言えば Eq. (113) は sharp k -space filter の場合には正しい。ただし, sharp k -space filter を用いた場合, smoothing scale R と mass scale M の関係は自明ではない。

経験的に得られた Sheth & Tormen (1999) mass function は N 体計算の結果と良く一致することが知られている。これは ellipsoidal collapse model にもとづいた質量関数になっているから (Sheth et al., 2001) である。

5 角運動量の進化

ここでは宇宙のある領域がどのように角運動量を獲得するかを, 線形理論にもとづいて考える。ある時刻に collapse することになる Eulerian x -space の volume V のもつ角運動量は,

$$\mathbf{L}(t) = \int_{a^3V} d^3r \rho \mathbf{r} \times \mathbf{v} = \bar{\rho} a^4 \int_V d^3x (1 + \delta) \mathbf{x} \times \mathbf{u}. \quad (114)$$

ここでは座標原点は volume V の重心にとってある。Eulerian volume V を対応する Lagrangian volume Γ に置き換えて,

$$\mathbf{L}(t) = \bar{\rho} a^5 \int_{\Gamma} d^3q (\mathbf{q} + \mathbf{S}) \times \frac{d\mathbf{S}}{dt}, \quad (115)$$

ここでは Eulerian coordinates \mathbf{x} から Lagrangian coordinate \mathbf{q} への mapping

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{q} + \mathbf{S}(\mathbf{q}, t) \quad (116)$$

を用いた。この mapping $\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{x}(\mathbf{q}, t)$ の Jacobian J (where $d^3x J^{-1} = d^3q$) は質量保存により密度揺らぎと

$$1 + \delta[\mathbf{x}(\mathbf{q}, t), t] = J(\mathbf{q}, t)^{-1} \quad (117)$$

の関係にある。Eq.(115) は exact な \mathbf{L} である。

ここで Zel'dovich 近似,

$$\mathbf{S}(\mathbf{q}, t) \simeq D(t) \mathbf{s}(\mathbf{q}) = D(t) \nabla \phi(\mathbf{q}) \quad (118)$$

を用いる。Eq.(115) は, first order で

$$\begin{aligned} \mathbf{L}(t) &\simeq \bar{\rho} a^5 \frac{dD}{dt} \int_{\Gamma} d^3q (\mathbf{q} + D \nabla \phi) \times \nabla \phi \\ &= \bar{\rho} a^5 \frac{dD}{dt} \int_{\Gamma} d^3q \mathbf{q} \times \nabla \phi \end{aligned} \quad (119)$$

になる。これを $\phi(\mathbf{q})$ を 0 のまわりで Taylor 展開してやり最初の三項まで考える,

$$\phi(\mathbf{q}) = \phi(0) + q_i \left. \frac{\partial \phi}{\partial q_i} \right|_{\mathbf{q}=0} + \frac{1}{2} q_i \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial q_i \partial q_j} \right|_{\mathbf{q}=0} q_j + \dots \quad (120)$$

代入すると、第二項だけが残るので、

$$L_i(t) \simeq \bar{\rho} a^5 \dot{D} \int_{\Gamma} d^3 q \epsilon_{ijk} q_j q_l \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial q_k \partial q_l} \right|_{\mathbf{q}=0} \quad (121)$$

Potential ϕ の微分の項を

$$\mathcal{D}_{kl} \equiv \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial q_k \partial q_l} \right|_{\mathbf{q}=0}, \quad (122)$$

inertia tensor を

$$\mathcal{I}_{jl} \equiv \bar{\rho} a^3 \int_{\Gamma} d^3 q q_j q_l \quad (123)$$

とすると

$$L_i(t) = a^2 \dot{D} \epsilon_{ijk} \mathcal{I}_{jl} \mathcal{D}_{kl}. \quad (124)$$

時間依存性は

$$L(t) \propto a^2 \dot{D} \propto t, \quad (125)$$

最後は Einstein-de Sitter を仮定しているが high- z ではこれは良い近似である。実際には turnaround 以降は tidal field から切り離されるため、角運動量の獲得は turnaround ($\delta = \delta_{\text{ta}} \simeq 1.05$) 辺りで終わり、この Lagrange 領域は角運動量を保存しながら collapse していくと考えられる。

6 Virial 定理と Virial 平衡

これまで説明せずに用いてきたがここで Virial 定理と Virial 平衡についてまとめておく。

6.1 Virial 定理

Virial 定理とは、粒子 i に働く力 \mathbf{F}_i が系全体のポテンシャルエネルギー、 V 、を用いて、

$$\mathbf{F}_i = -\nabla_{\mathbf{r}_i} V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N), \quad (126)$$

と表せるなら

$$\langle K \rangle = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \langle \nabla_{\mathbf{r}_i} V \cdot \mathbf{r}_i \rangle \quad (127)$$

となることを言う。ここで K は系全体の運動エネルギー、 $\langle x \rangle$ は物理量 x の時間平均を表す。 V が中心力ポテンシャルで粒子間距離の $n+1$ 乗に比例する場合、つまり、

$$V(r) = ar^{n+1}$$

ならば、

$$\langle K \rangle = \frac{n+1}{2} \langle V \rangle \quad (128)$$

になる。重力の場合 $n = -2$ なので、

$$\langle K \rangle = -\frac{1}{2}\langle V \rangle \quad (129)$$

となる。

簡単な証明は以下のようになる。粒子が有限な軌道をもつ場合にビリアル

$$G = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{p}_i \quad (130)$$

を時間で微分すると、

$$\begin{aligned} \frac{dG}{dt} &= \sum_i (\dot{\mathbf{r}}_i \cdot \mathbf{p}_i + \mathbf{r}_i \cdot \dot{\mathbf{p}}_i) \\ &= \sum_i \frac{\mathbf{p}_i}{m_i} \cdot \mathbf{p}_i + \sum_i \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{F}_i \\ &= 2K + \sum_i \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{f}_i \end{aligned} \quad (131)$$

両辺を $[0, t]$ で積分し、 t で割ることにより時間平均をとり、 $t \rightarrow \infty$ で長時間平均を計算すると、軌道が有限であることより左辺は

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \frac{dG}{dt} dt = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{G(t) - G(0)}{t} = 0. \quad (132)$$

つまり

$$2\langle K \rangle + \left\langle \sum_i \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{F}_i \right\rangle = 0. \quad (133)$$

中心力ポテンシャル V が粒子間の距離の $n+1$ 乗に比例する場合、このポテンシャルは次のように書ける：

$$V(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{N-1}) = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j<i} a |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^{n+1}. \quad (134)$$

粒子 i に働く力は

$$\mathbf{F}_i = -\nabla_{\mathbf{r}_i} V = -a(n+1) \sum_{j \neq i} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^{n-1} = \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ij}. \quad (135)$$

ゆえに、

$$\begin{aligned} \sum_i \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{F}_i &= \sum_i \sum_{j \neq i} \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{F}_{ij} \\ &= \sum_i \sum_{j<i} \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{F}_{ij} + \sum_i \sum_{j>i} \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{F}_{ij} \\ &= \sum_i \sum_{j<i} \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{F}_{ij} - \sum_i \sum_{j<i} \mathbf{r}_j \cdot \mathbf{F}_{ji} \\ &= \sum_i \sum_{j<i} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \cdot \mathbf{F}_{ij} \\ &= \sum_i \sum_{j<i} (-a)(n+1) |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^{n+1} = -(n+1)V. \end{aligned} \quad (136)$$

結局, 式 (133) はこの場合,

$$\langle K \rangle = \frac{n+1}{2} \langle V \rangle = 0 \quad (137)$$

と書ける. 重力の場合には $V(r) \propto r^{-1}$ なので $n = -2$ となり

$$\langle K \rangle = -\frac{1}{2} \langle V \rangle \quad (138)$$

が成り立つ.

6.2 Virial 平衡

自己重力系の場合, 時間平均を考えれば常に式 (138) が成り立っている. 一方, 系が力学平衡状態にあれば, あらゆる時刻で

$$K = -\frac{1}{2}V \quad (139)$$

となるはずである. 逆に, 常に (だいたい) 式 (139) が成り立っている場合, 系は virial 平衡にあるという.

7 無衝突系の緩和

銀河やダークハローは無衝突系であると考えられる. 無衝突系とは二体緩和のタイムスケールが宇宙年齢よりも長い系を言う. 大雑把に言って, ある特定の質点からの加速度が運動を支配するのが衝突系, 質点の分布が作る滑らかなポテンシャルに従って粒子が運動するのが無衝突系ともいいかも知れない. 無衝突粒子の位相空間密度 $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ は無衝突ボルツマン方程式

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f - \nabla \Phi \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0 \quad (140)$$

に従う. ここで $\Phi(\mathbf{x}, t)$ はポテンシャルエネルギーである.

さて, 星の系としての銀河やダークマターの集団としてのダークハローは無衝突系だが, 楕円銀河やダークハローはその言葉通り丸く, ある種の力学平衡状態にあるように見えるし^{*14}, 実際に数値シミュレーションで形成されたそれらを調べるとその内部の運動エネルギーとポテンシャルエネルギーはほぼ式 (139) に従っており, virial 平衡にあることが分かる. これらの系はどのように緩和したのだろうか. 以下で無衝突系の緩和に重要な 2 つのプロセスを紹介する.

7.1 Phase mixing

様々なエネルギーを持ってポテンシャルの井戸の中を運動する粒子群を考える. 初期の分布関数は $f(\epsilon, \phi)$ とする. ここで, ϵ はある粒子のエネルギー, ϕ はある粒子の振動の phase である. ここでは粒子間のエネルギー交換を考えないので微視的に見れ

*14 ダークハローは見えないが

ば系は決して緩和しない. ところがエネルギーの大きな粒子ほど周期が大きいために phase が遅れ, $f(\epsilon, \phi, t)$ の分布は巨視的に見ればある一定の状態に漸近的に近づいて行き [図 1], 巨視的には系の緩和が進んでいるとみなせる. これが phase-mixing である.

7.2 Violent relaxation

無衝突系の緩和過程としてもう 1 つ大事なのが violent relaxation (Lynden-Bell, 1967) と呼ばれるものである. 具体的には, 系のポテンシャルエネルギーが激しく時間変化した場合, 無衝突粒子のエネルギーもランダムに変化し, ある種の平衡状態に達するはずだという主張である.

ではこの violent relaxation の時間スケールを見積もってみる. 各粒子のエネルギーの変化率はポテンシャルエネルギーの時間変動率と等しいので,

$$\dot{\epsilon} = \frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad (141)$$

となる. 緩和時間 τ_r は,

$$\tau_r = \left\langle \frac{\dot{\epsilon}}{\epsilon^2} \right\rangle^{-\frac{1}{2}} = \left\langle \frac{(\partial \phi / \partial t)^2}{\epsilon^2} \right\rangle^{-\frac{1}{2}} \quad (142)$$

となる. Virial 定理 [式 (138)] より,

$$\left\langle \frac{v^2}{2} \right\rangle = -\frac{1}{4} \langle \phi \rangle \quad (143)$$

が成り立ち,

$$\epsilon \sim \frac{3}{4} \phi \quad (144)$$

なので, 式 (142) は

$$\tau_r \sim \frac{3}{4} \left\langle \frac{(\partial \phi / \partial t)^2}{\phi^2} \right\rangle^{-\frac{1}{2}} \quad (145)$$

となる. つまり系はポテンシャルエネルギーの変化の時間スケール (dynamical time) 程度で緩和できることになる.

ただし, これはポテンシャルエネルギーが時間変化するることによる緩和過程なので, 系が力学平衡状態に近づくとエネルギー変化も止まってしまう. そのため, 緩和がどの程度進むかは数値実験

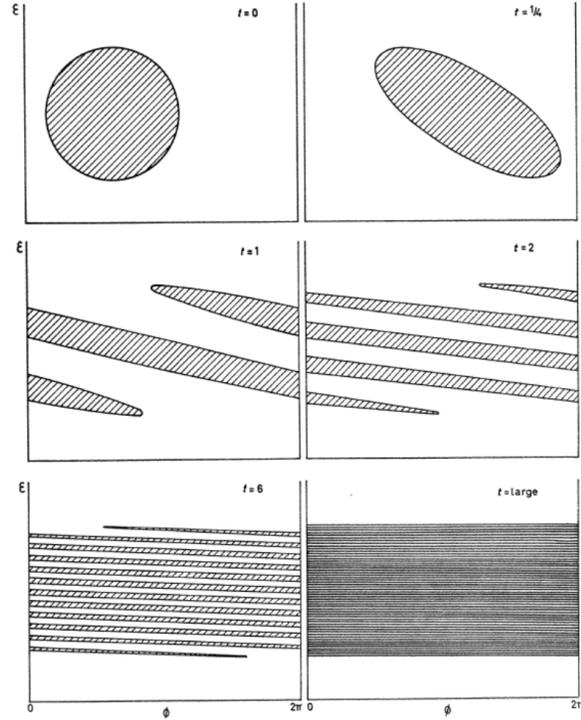


図 1 時刻 $t = 0$ に $f(\epsilon, \phi)$ が円の中で一様に分布した状態で, 粒子がポテンシャルの井戸の中を運動した場合の $f(\epsilon, \phi, t)$ の進化 (Lynden-Bell, 1967). 巨視的には $f(\epsilon, \phi, t)$ はある一定の分布に近づいて行くことが分かる.

をしてみないとよくわからない。数値実験の結果をみても (例えば van Albada, 1982), violent relaxation のようなプロセスは実際に働くが, 系は完全には緩和せず, 初期に低いエネルギーを持っていた粒子は終状態でも低いエネルギーを持ち, 強く初期条件を覚えていることが分かる。

いずれにしろ, 無衝突系の緩和過程ではどちらか単独ではなく phase mixing と violent relaxation の両方が働いていると思われる。Violent relaxation が働くような激しいポテンシャルエネルギーの時間変動は, 銀河同士の合体などによって引き起こされるため, 楕円銀河は銀河合体によって形成されたと考えるのが一般的である。また, コールドダークマターモデルでは, 小さなダークハローから先に重力崩壊し, それらが集合・合体することにより大きなハローが形成されるため, ダークハローの緩和過程としても violent relaxation はもっともらしいと言える。

8 CDM モデルと銀河形成

9 様々なシミュレーション手法とその問題点

参考文献

- Bond J. R., Cole S., Efstathiou G., Kaiser N., 1991, ApJ, 379, 440
Lynden-Bell D., 1967, MNRAS, 136, 101
Nakamura T. T., Suto Y., 1997, Progress of Theoretical Physics, 97, 49
Peacock J. A., Heavens A. F., 1990, MNRAS, 243, 133
Press W. H., Schechter P., 1974, ApJ, 187, 425
Sheth R. K., Mo H. J., Tormen G., 2001, MNRAS, 323, 1
Sheth R. K., Tormen G., 1999, MNRAS, 308, 119
Somerville R. S., Primack J. R., 1999, MNRAS, 310, 1087
van Albada T. S., 1982, MNRAS, 201, 939
Zel'dovich Y. B., 1970, A&A, 5, 84