

二日目

A Self-consistent Model of the Black  
Hole Evaporation and  
the Information problem

横倉祐貴(YITP)

(with 川合光)

# 二日目の流れ

## Part 1: A self-consistent model

- 1 イントロ
- 2 1 shell model
- 3 continuum model

## Part 2: An approach to the information problem in particle picture

- 4 Entropy
- 5 An interaction model
- 6 Eikonal近似の限界

## Part 2: An approach to the information problem in wave picture

- 7 場としての解析
- 8 まとめと展望

# Part 1: A self-consistent model

参考 : Hikaru Kawai, Yoshinori Matsuo, and Yuki Yokokura,

“A Self-consistent Model of Black Hole Evaporation”

International Journal of Modern Physics A, Volume 28, 1350050 (2013) ]

# 1 Introduction

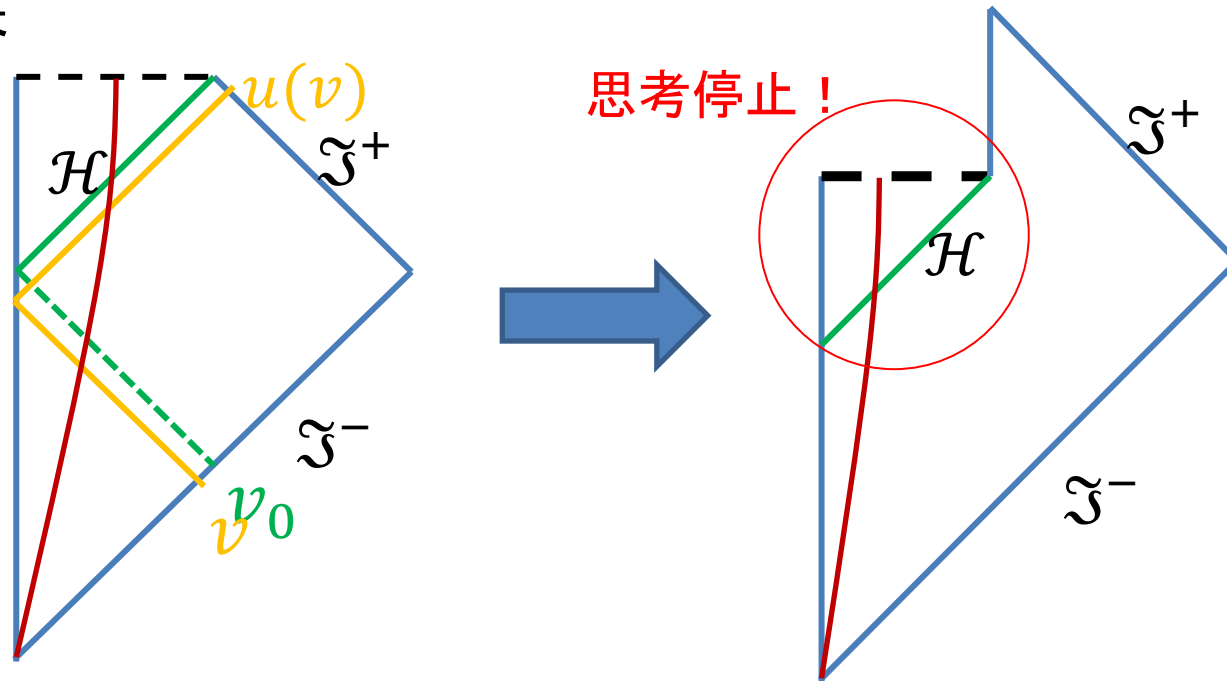
# もう一度問題点のおさらい

従来のアプローチは次の手順:

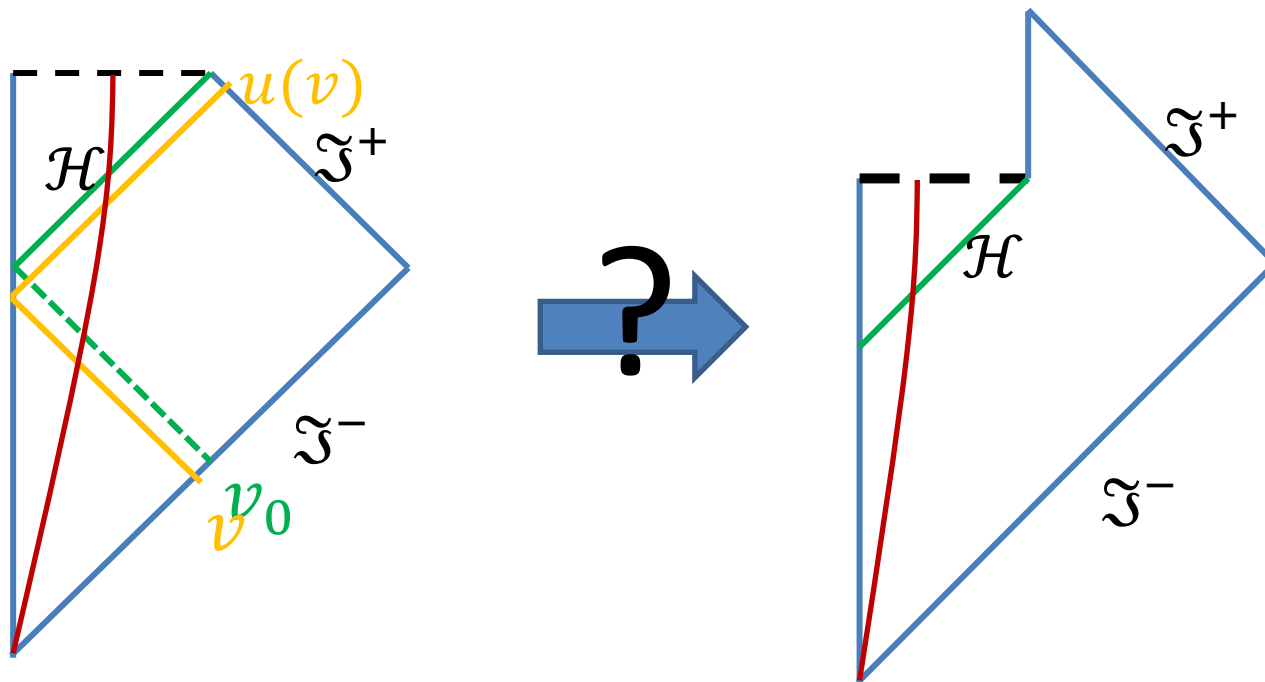
- (1) 仮定「重力崩壊でBHができる」
- (2) 真空の静的BH解を使う
- (3) そこからの時間発展を考えて、問題を解こうとする  
(多くの場合、test field (or partcile) として議論するだけ)

⇒エネルギーの流れと情報(物質場)の流れの不一致

⇒情報喪失

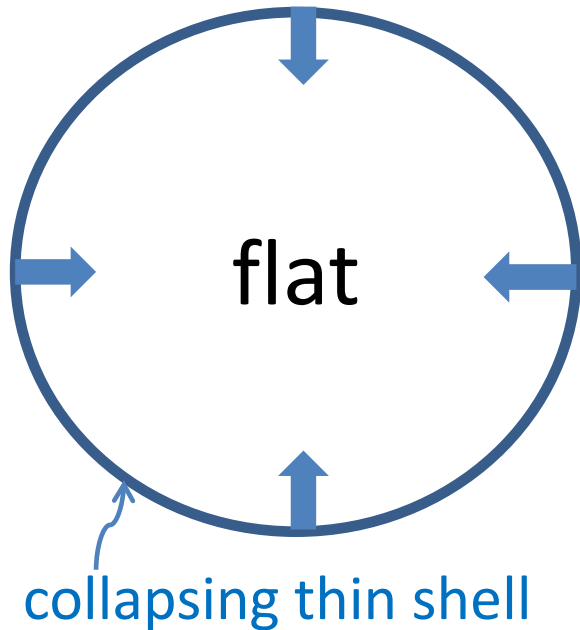


疑問:そもそも本当にこの時空になるのか?

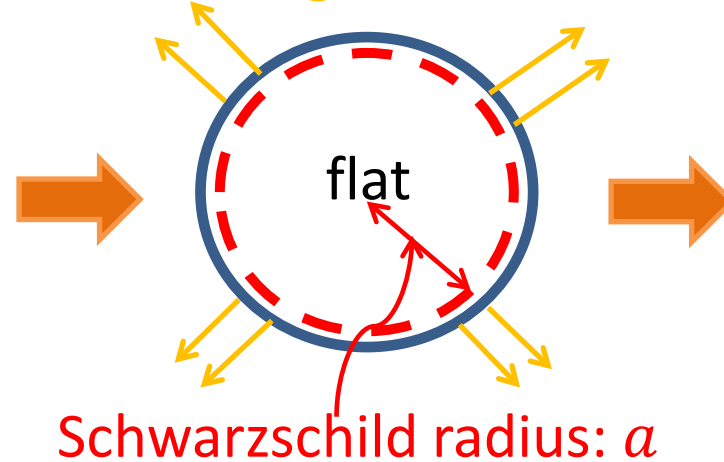


# 外の人重力崩壊を見た時の 素朴な描像

outside:  
Schwarzschild metric



Outside: a metric with  
back reaction from the  
Hawking radiation



complete  
evaporation

Four yellow arrows pointing outward from the center, representing the final state of complete evaporation.

疑問：本当にこれは実現するの？



疑問：本当にこれは実現するの？

⇒ 答え：Yes!

(ただし、ある程度物理的な仮定の下で)

# 我々のアプローチ: self-consistent eqs.

目標:

時空と情報の時間発展を完全に理解したい



物質と時空をともに量子力学的に解く  
⇒難しい!



半古典近似方程式をself-consistentな方法で解く

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G \langle T_{\mu\nu} \rangle$$

$$\nabla^2 \phi = 0$$

⇒それでも難しい……

# 我々のアプローチ: self-consistent eqs.

目標:  
時空と情報の時間発展を完全  
に理解したい

物質と時空をともに量子力学的に解く  
⇒難しい!

半古典近似方程式をself-consistentな方法で解く

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G \langle T_{\mu\nu} \rangle$$
$$\nabla^2 \phi = 0$$

今日の話

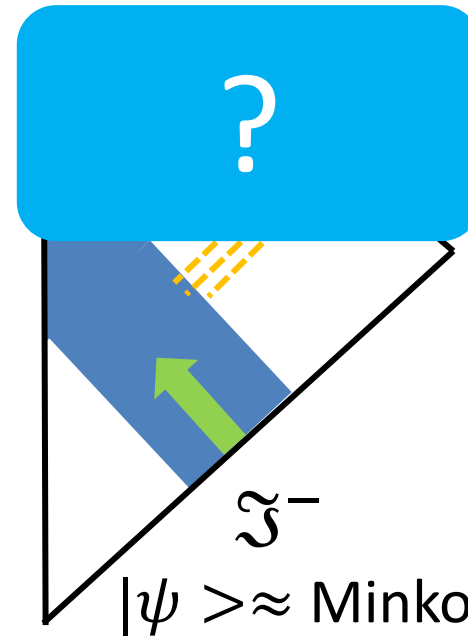
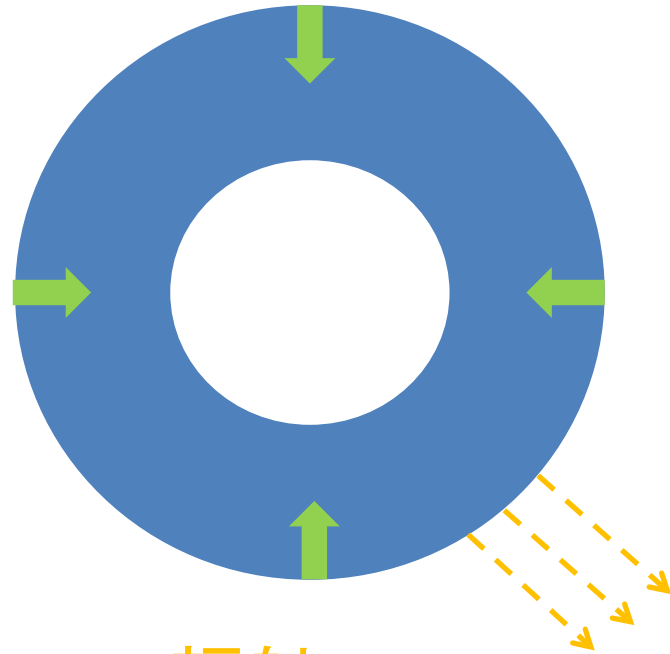
⇒それでも難しい……

そこで、次の近似を用いる:

- Eikonal 近似 ⇒ 波動方程式が解ける
- massless scalar場のs波だけを使う ⇒ 1つの方程式に帰着
- 物質場の自由度が多い:  $N \gg 1$  ⇒  $g_{\mu\nu}$ を古典的に保つ

# 物理的状況

連続的なnullな物質が崩壊するとする



Hawking 輻射

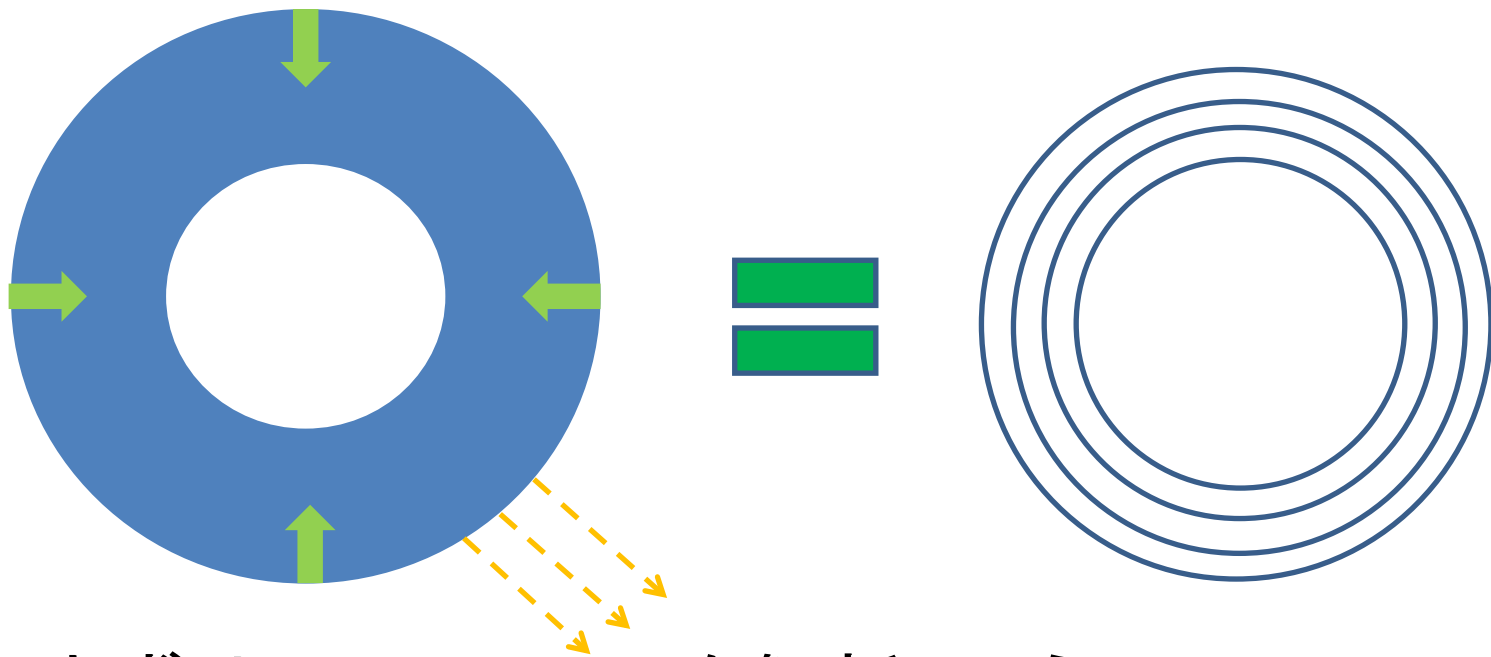
は **massless** scalar fields:  $\phi$  で表す

# どうやって解くのか？

- 球対称の仮定

⇒内と外を区別できる

⇒「連続物質＝shellの集まり」と見なせる

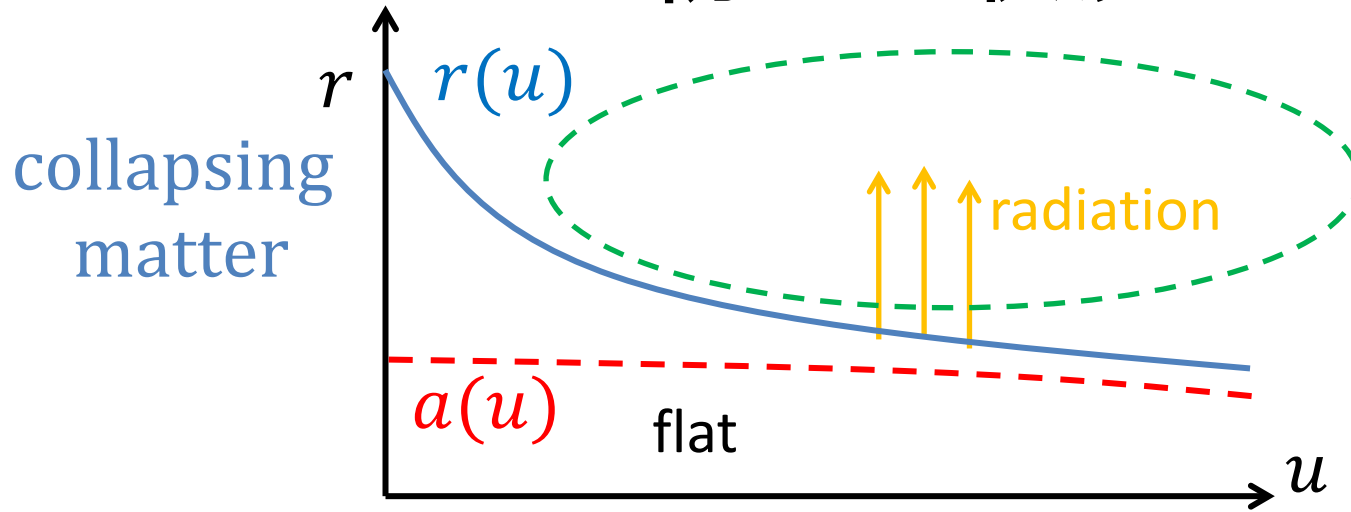


⇒まずは、1つのshellを解析しよう

2 1 shell model

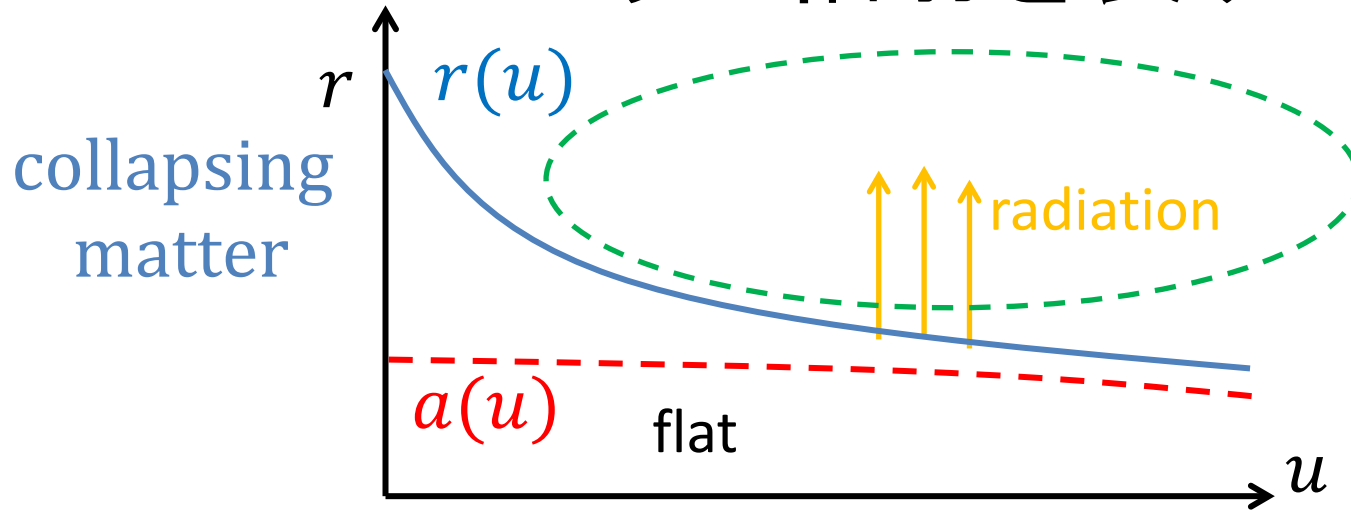
## 2-1: Setup

# 物理的狀況





# どのように輻射を表すか？



輻射は、s波かつ massless である

⇒ gray-body factor を無視できる

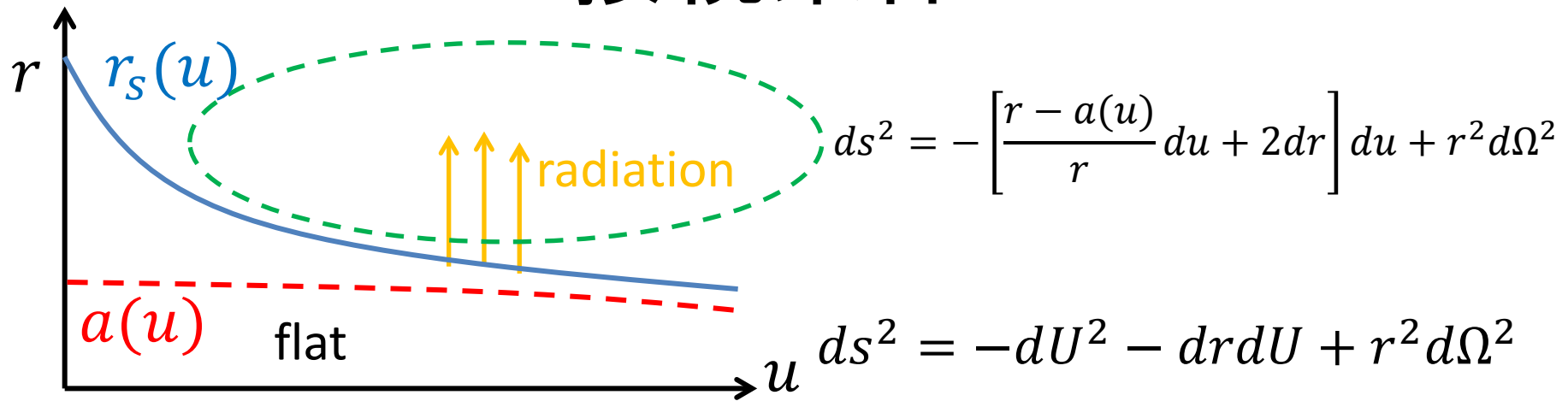
⇒ traceless な外向き動径のエネルギー一流だけ

⇒ the outgoing Vaidya metric:

$$ds^2 = - \left[ \frac{r - a(u)}{r} du + 2dr \right] du + r^2 d\Omega^2$$

$$G_{uu} = - \frac{\dot{a}(u)}{r^2}, \quad G^\mu{}_\mu = 0, \quad m(u) = \frac{a(u)}{2G} : \text{Bondi mass}$$

# 接続条件



- Shell上で接続する:

$$dU = -2dr_s = \left(1 - \frac{a(u)}{r_s(u)}\right) du$$

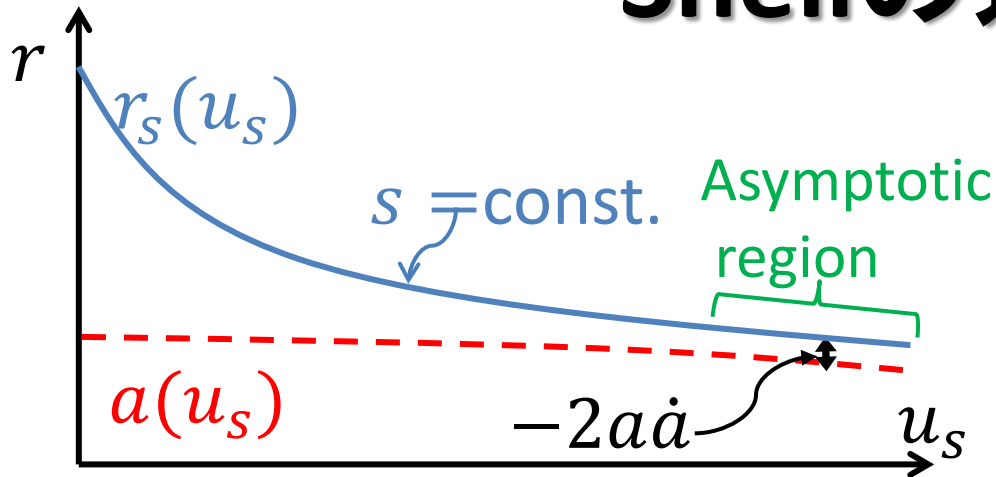
⇒座標系の用意が完了

⇒未知関数 $a(u)$ を決定しよう:

$$-\frac{\dot{a}(u)}{r^2} = G_{uu} = 8\pi G \langle T_{uu} \rangle \Leftrightarrow \dot{m} = -4\pi r^2 \langle T_{uu} \rangle \equiv -J$$

期待値の評価が必要!

# Shellの運動



$$ds^2 = - \left[ \frac{r - a(u)}{r} du + 2dr \right] du + r^2 d\Omega^2 = 0$$

$$\frac{dr_s(u)}{du} = - \frac{r_s(u) - a(u)}{2r_s(u)}$$

- 仮定:  $|\dot{a}| \ll 1 \Rightarrow$  近似解

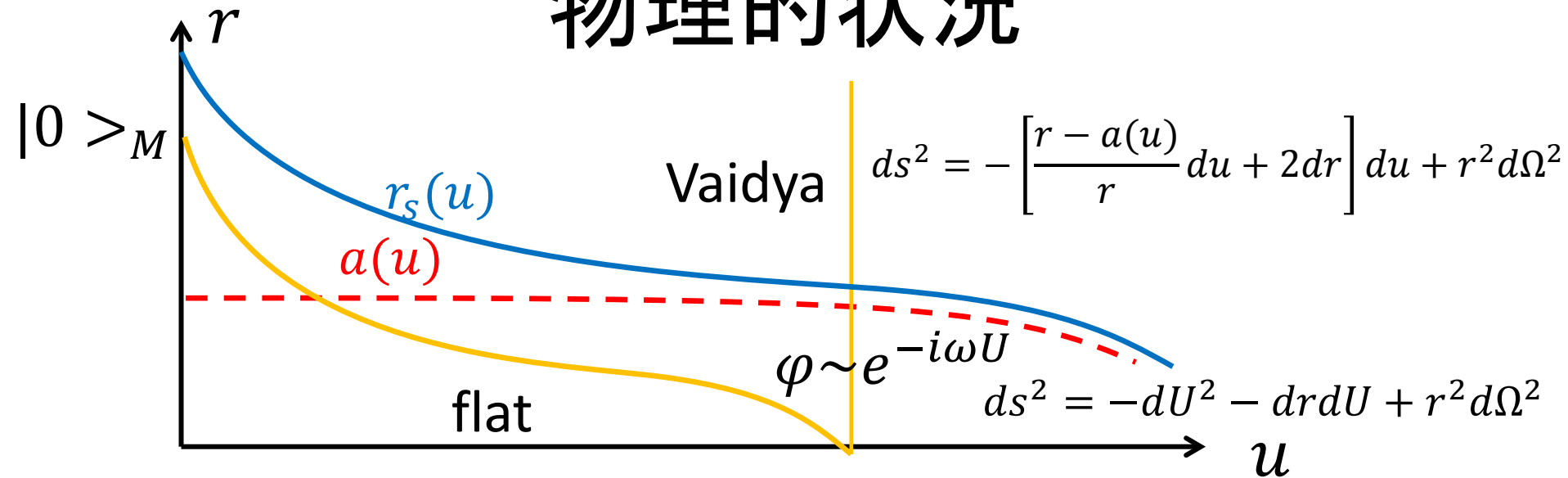
$$r_s(u) \approx a(u) - 2a(u)\dot{a}(u) + C e^{-\frac{u}{2a(u)}}$$

- 漸近的には

$$r_s(u) \approx a(u) - 2a(u)\dot{a}(u)$$

2-2: Flux Formula  $J = 4\pi r^2 \langle T_{uu} \rangle$

# 物理的状況



- 仮定：Eikonal近似とs波近似
- Hawkingのように、Minkowski真空 $|0 \rangle_M$ からやってきた場の時間発展に注目する:

$$\phi = \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \left( \frac{e^{-i\omega U}}{\sqrt{4\pi r}} a_\omega + \frac{e^{i\omega U}}{\sqrt{4\pi r}} a_\omega^\dagger \right)$$

$$a_\omega |0 \rangle_M = 0$$

# 波動方程式のEikonal近似

- Eikonal近似

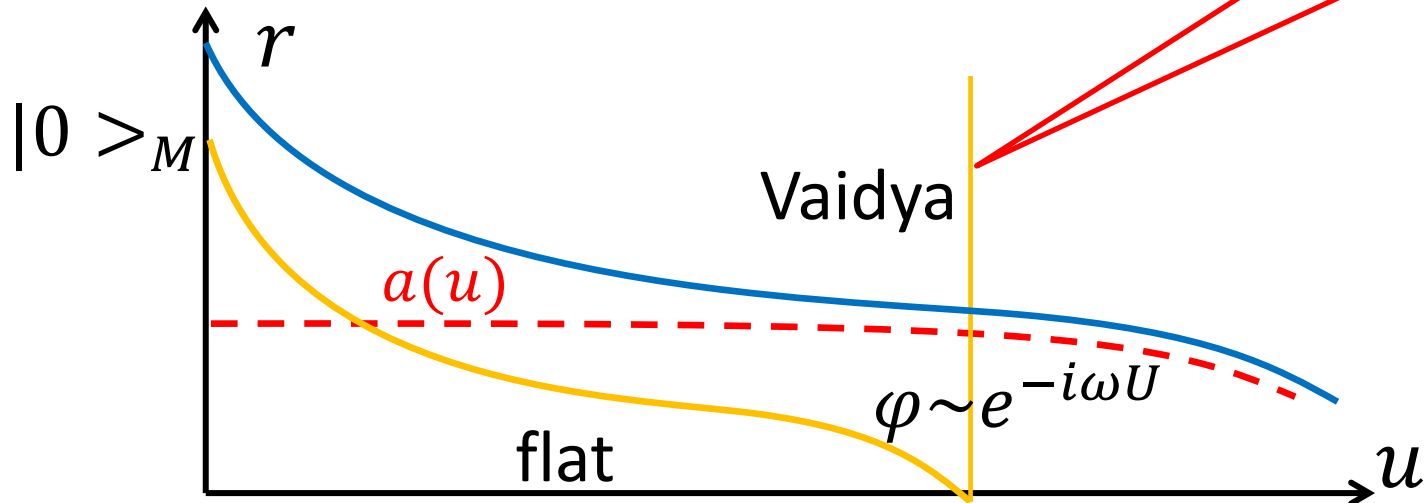
=波動を幾何光学(粒子描像)で近似すること

- $\varphi(u, r) = e^{i\frac{S(u, r)}{\hbar}}$  とおき、 $\hbar$ のleadingを捨てる:

$$\nabla^2 \varphi = 0 \Rightarrow \left( \partial_u - \frac{r - a(u)}{2r} \partial_r \right) S \partial_r S = 0$$

⇒外向き:  $\varphi_{out}(u, r) = e^{i\frac{f(u)}{\hbar}} = e^{i\frac{U(u)}{\hbar}}$

Eikonal は外向きの軌跡に沿って一定



# point splitting regularization

Heisenberg eqの解である、運動後の場

$\phi = \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \left( \frac{e^{-i\omega U(u)}}{\sqrt{4\pi r}} a_\omega + \frac{e^{i\omega U(u)}}{\sqrt{4\pi r}} a_\omega^\dagger \right)$  に対して、  
 $\langle 0 | T_{uu}(u) | 0 \rangle = \langle 0 | [\partial_u \phi(u)]^2 | 0 \rangle$  を構成したいが、  
素朴に計算すると、量子揺らぎで発散する。

⇒ point splitting regularization

$$\begin{aligned} & \langle 0 | : T_{uu}(u) : | 0 \rangle \\ &= \lim_{u' \rightarrow u} [\langle 0 | : \partial_u \phi(u) \partial_u \phi(u') : | 0 \rangle - \langle 0 | : \partial_u \phi_0(u) \partial_u \phi_0(u') : | 0 \rangle] \\ &= \frac{\hbar}{4\pi r^2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \frac{d\omega}{2\pi} \omega \dot{U}(u + \varepsilon) \dot{U}(u - \varepsilon) e^{-i\omega(U(u+\varepsilon) - U(u-\varepsilon))} - (U = u) \\ &= \frac{1}{4\pi r^2} \frac{\hbar}{16\pi} \{u, U\} \end{aligned}$$

$$J(u) = \frac{\hbar}{16\pi} \{u, U\} \equiv \frac{\hbar}{16\pi} \left[ \frac{\ddot{U}(u)^2}{\dot{U}(u)^2} - \frac{2\ddot{U}(u)}{3\dot{U}(u)} \right]$$

Note: 他の成分はゼロ

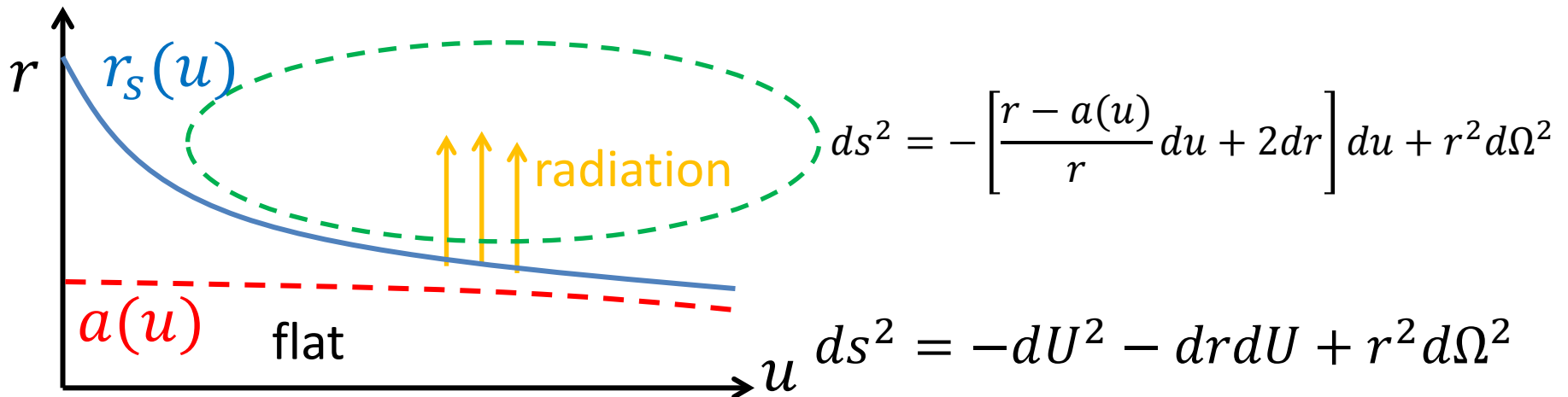
# Self-consistent equations for 1-shell model

- 以上より、self-consistent equations ( $G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}, \nabla^2 \phi = 0$ ) は次に帰着する:

$$\frac{da}{du} = -\frac{l_p^2}{8\pi} \{u, U\}$$

$$U(u) = -2r_s(u)$$

$$\frac{dr_s}{du} = -\frac{r_s(u) - a(u)}{2r_s(u)}$$



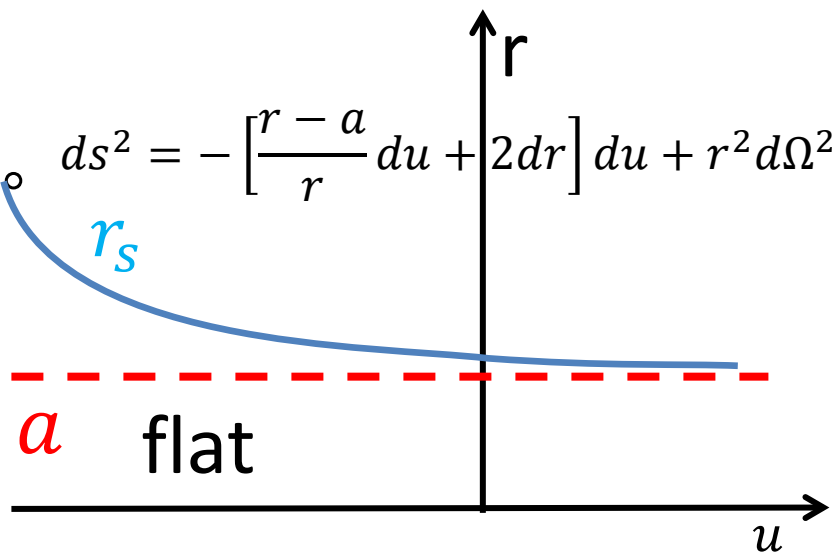


# 得られた公式のテスト: Schwarzschild BH

Flux公式をback reactionがないときに、  
正しくHawking輻射を導くかを確認する。

$$\frac{dr_s}{du} = -\frac{r_s(u) - a}{2r_s(u)}$$
$$\Rightarrow r_s(u) = a + Ce^{-u/2a}$$

$$U(u) = -2r_s(u)$$



$$\Rightarrow J(u) = \frac{\hbar}{16\pi} \left[ \frac{\ddot{r}_s(u)^2}{\dot{r}_s(u)^2} - \frac{2\ddot{r}_s(u)}{3\dot{r}_s(u)} \right] = \frac{\hbar}{192\pi} \frac{1}{a^2}$$

これを1次元熱輻射の公式と比べる:  $J = \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi} \frac{\hbar\omega}{\exp\left[\frac{\hbar\omega}{T}\right] - 1} = \frac{\pi N}{12\hbar} T^2$

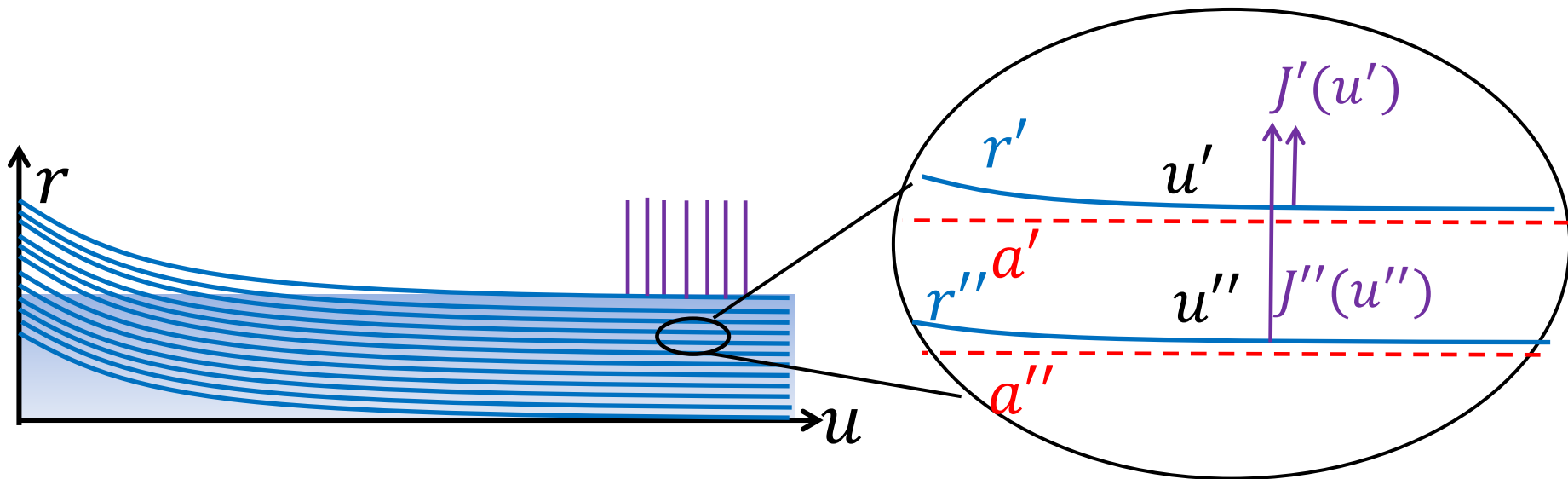
$$\Rightarrow T = \frac{\hbar}{4\pi a} = \frac{\hbar}{8\pi GM} : \text{Hawking温度}$$

# 3 Continuum model

# 3-1: Setup

# 物理的状況

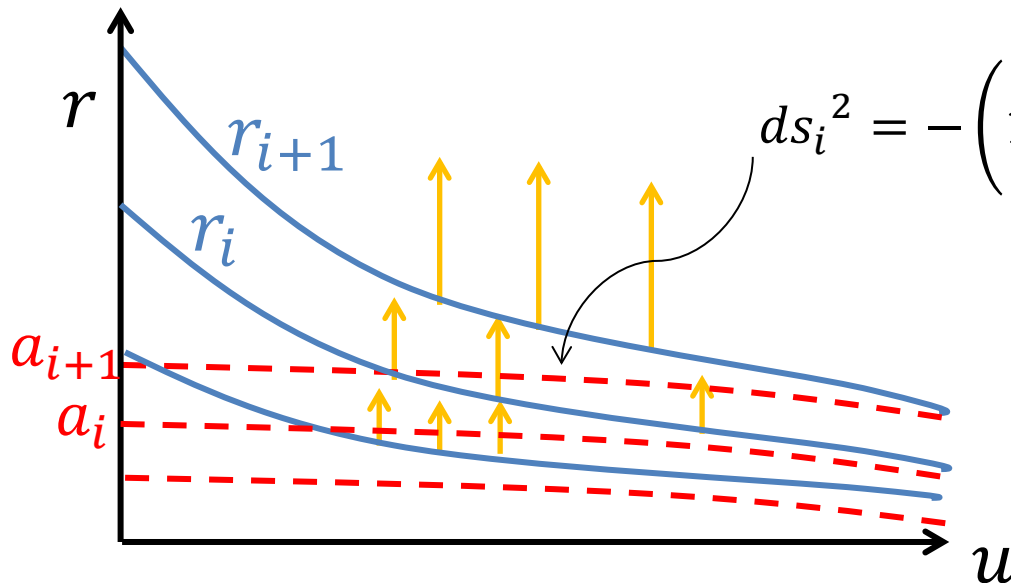
- 連続分布した物質 = 複数のshellが重力崩壊する場合を考える



# 解くべき方程式

1つのshellに注目すると、それよりも外側の物理はそこには影響しない

⇒各shellに対して、1-shell modelと同じことが成立



$$ds_i^2 = - \left( 1 - \frac{a_i(u_i)}{r} \right) du_i^2 - 2du_i dr + r^2 d\Omega^2$$

$$\frac{dr_i}{du_i} = - \frac{r_i(u_i) - a_i(u_i)}{2r_i(u_i)}$$

$$\frac{da_i}{du_i} = -2GJ_i = - \frac{Nl_p^2}{8\pi} \{u_i, U\}$$

$$\frac{du_i}{du_{i-1}} = \frac{r_i - a_i}{r_i - a_{i-1}} < 1$$

$N$  : スカラー場の自由度 (標準理論:  $N \sim 100$ )

$\frac{d}{du_i}$  = shell  $r_i$  の領域での微分

# 問題

- 問1 : Hawking輻射はどのようにでるのか？
- 問2 : Planck-like分布はどのように現れるのか？
- 問3 : 内部の計量はどのようなものか？
- 問4 : 結局、どのように蒸発するのか？  
その時に、horizonやsingularityは生じるか？

## 3-2: Hawking flux

課題:  $J_i = \frac{N\hbar}{16\pi} \{u_i, U\}$  を連続shell内で評価する

# 導出1

各shellは既に自身のSchwarzschild半径に近づいているとする:

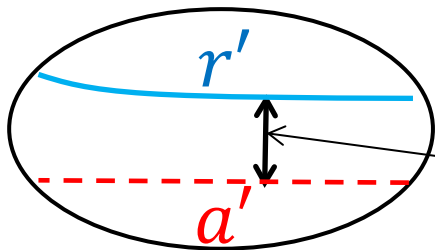
$$\frac{dr'}{du'} = -\frac{r'(u') - a'(u')}{2r'(u')} \Rightarrow r' = a' - 2a' \frac{da'}{du'}$$

その領域では、各shellからのflux  $J'(u')$  は  $a'$  の関数だと期待:

$$\frac{da'}{du'} = -f(a')$$

We will see

$$\frac{da}{du} \sim -\frac{1}{a^2}$$



$$\rho' \equiv r' - a' = -2a' \frac{da'}{du'} = 2a' f(a')$$



# 導出2

次にredshiftを考慮して、時間座標を接続する:

もし  $a' - a'' = da$  が微小ならば、

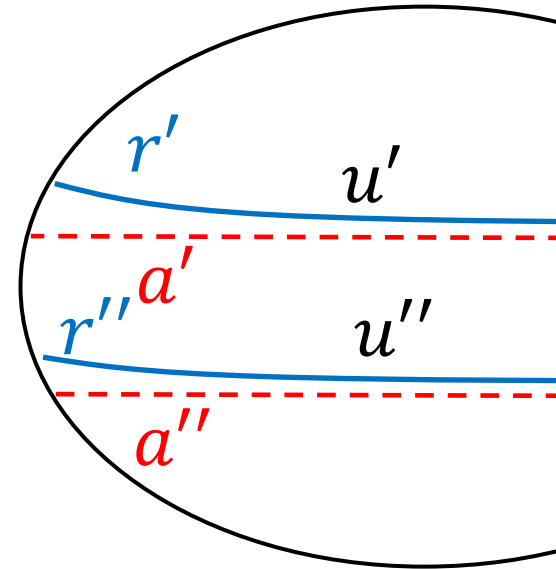
$$\frac{du''}{du'} = \frac{r' - a'}{r' - a''} = 1 - \frac{da}{\rho'}$$

今、 $\rho' = \rho'(a')$  なので、有限のredshiftに対して

$$\frac{du''}{du'} = \exp\left(-\int_{a''}^{a'} \frac{d\bar{a}}{\rho(\bar{a})}\right)$$

特に  $a'' = 0$  と  $u'' = U$  にとると、

$$\frac{dU}{du'} = \exp\left(-\int_0^{a'} \frac{d\bar{a}}{\rho(\bar{a})}\right)$$



# 導出3

ところでSchwarzian derivativeは次のように表せる:

$$\{u', U\} = \frac{1}{6} \left( \xi'^2 - \frac{d\xi'}{du'} \right), \quad \text{where } \xi' \equiv \frac{d}{du'} \log \left( \frac{dU}{du'} \right).$$

ここで  $\frac{dU}{du'} = \exp \left( - \int_0^{a'} \frac{d\bar{a}}{\rho(\bar{a})} \right)$  を使うと

$$\xi' = \frac{d}{du'} \left( - \int_0^{a'(u')} \frac{d\bar{a}}{\rho(\bar{a})} \right) = - \frac{1}{\rho'} \frac{da'}{du'} = \frac{1}{2a'}$$

$$\rho' = -2a' \frac{da'}{du'}$$

従って、次の公式を得る:

$$J' = \frac{N\hbar}{192\pi} \frac{1}{a'^2} \left[ 1 + 4 \frac{da'}{du'} \right]$$

ダイナミカルな補正項!

⇒ 各shell  $r'$  は温度  $T' = \frac{\hbar}{4\pi a'}$  の輻射をしている

$$J = \frac{\pi N}{12\hbar} T^2$$

# Self-consistent eq

各shellでのEinstein eqは

$$\frac{da'}{du'} = -\frac{Nl_p^2}{96\pi a'^2}.$$

特に最外shellは次のように蒸発する:

$$\frac{da}{du} = -\frac{Nl_p^2}{96\pi a^2}.$$

Horizonは現れない!

⇒全体としての寿命は通常と同じ:

$$\Delta u_{life} \sim \frac{a^3}{Nl_p^2}$$

各層の距離は

$$\rho' \equiv r' - a' = -2a' \frac{da'}{du'} = \frac{Nl_p^2}{48\pi a'}$$

各層の外から見た時の時間遅れは

$$\frac{du'}{du} = e^{-\int_{a'}^a d\bar{a} \frac{1}{\rho(\bar{a})}} = e^{-\frac{24\pi}{Nl_p^2}(a^2 - a'^2)}$$
$$\sim e^{-\frac{48\pi}{Nl_p^2}a(a-a')}$$

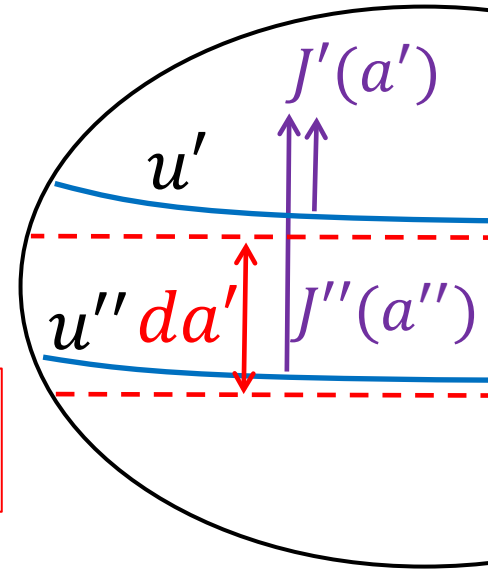
幅 $\Delta r \sim \frac{Nl_p^2}{48\pi a}$ だけが時間流れる

# 各shellからの輻射の和 = 全体の輻射

- $r'$ から出る輻射 =

$$\begin{aligned}
 & J(a') - J(a' - da') \left[ \frac{du'}{du''} \right]^2 \\
 & \approx \frac{N\hbar}{192\pi} \frac{1}{a'^2} - \frac{N\hbar}{192\pi} \frac{1}{a'^2} \left[ 1 + \frac{2da'}{a'} \right] \left[ 1 - \frac{96}{Nl_p^2} a' da' \right] \\
 & \approx \frac{da'}{2a'}
 \end{aligned}$$

$r'$ 自体のもつエネルギーの生む時間の遅れが効く  
 $\Rightarrow$ まさに $r'$ 自身から出るエネルギー



- 各層からの輻射の和 =

$$\begin{aligned}
 & \int_0^a \frac{da'}{2a'} \left[ e^{-\frac{24\pi}{Nl_p^2}(a^2 - a'^2)} \right]^2 \\
 & \approx \frac{1}{2a} \int_0^a da' e^{-\frac{96\pi}{Nl_p^2}a(a-a')} = \frac{N\hbar}{192\pi} \frac{1}{a^2} = \text{全体の輻射}
 \end{aligned}$$

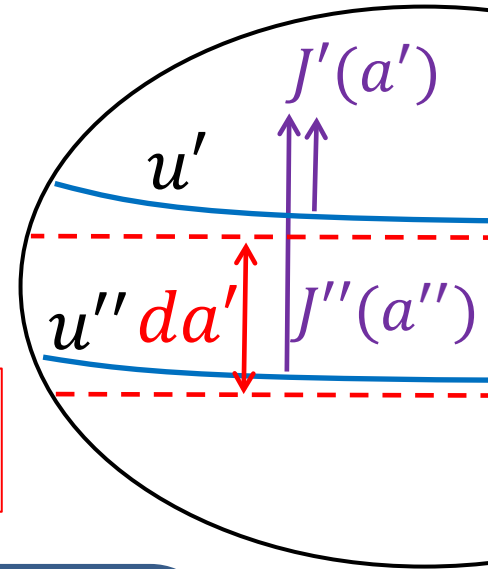
表面だけが効く

# 各shellからの輻射の和 = 全体の輻射

- $r'$ から出る輻射 =

$$\begin{aligned}
 & J(a') - J(a' - da') \left[ \frac{du'}{du''} \right]^2 \\
 & \approx \frac{N\hbar}{192\pi} \frac{1}{a'^2} - \frac{N\hbar}{192\pi} \frac{1}{a'^2} \left[ 1 + \frac{2da'}{a'} \right] \left[ 1 - \frac{96}{Nl_p^2} a' da' \right] \\
 & \approx \frac{da'}{2a'}
 \end{aligned}$$

$r'$ 自体のもつエネルギーの生む時間の遅れが効く  
 $\Rightarrow$ まさに $r'$ 自身から出るエネルギー



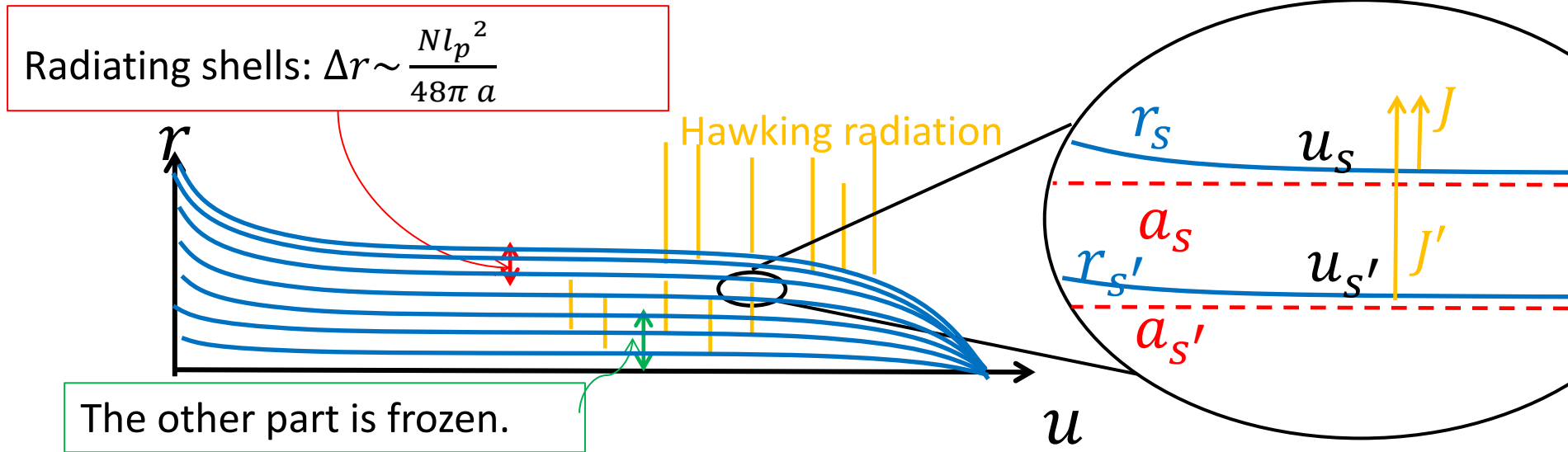
## Remark!

1つのshellのエネルギーは指数的に減少する

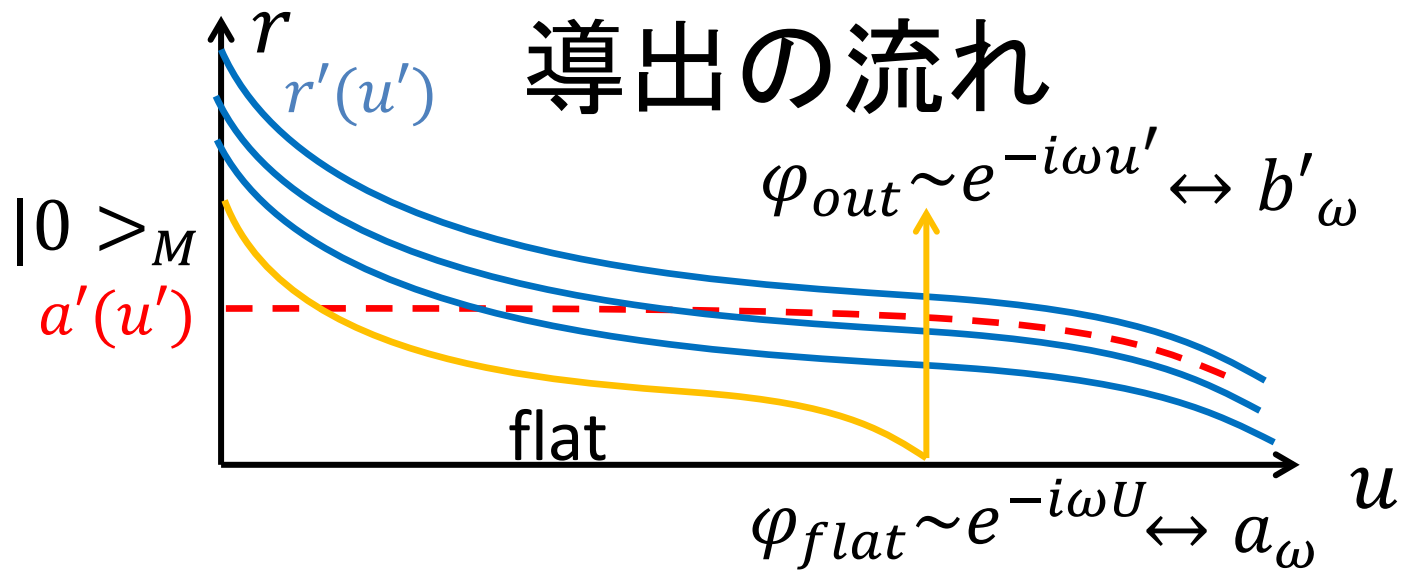
$$\frac{d\Delta m}{du} = -\frac{1}{2a} \Delta m \Rightarrow \Delta m(u) = \Delta m_0 e^{-\frac{u}{2a}}$$

表面だけが効く

# 結局、全体の描像は次になる：



## 3-3: Planck-like 分布



- 仮想的に注目したshellの外はないとする。

- 目標:  $\beta_{\omega\omega'} = -\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\omega}{\omega'}} \int_{-\infty}^{\infty} du' e^{i\omega u'} e^{i\omega' U(u')}$

$$\frac{dU}{du'} = e^{-\frac{24\pi}{Nl_p^2} a'^2(u')} \Rightarrow U(u') = A + B a' e^{\frac{u'}{2a'}}$$

$$\Rightarrow \langle 0 | b_\omega^\dagger b_\omega | 0 \rangle = \frac{1}{\frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar}{4\pi a'}}} - 1}, \quad T' = \frac{\hbar}{4\pi a'}$$



3-4: metric

# 内部解の導出

1つのshell  $r' = a' + \rho'$  の近傍の計量に注目する:

$$ds^2 = -\frac{r'-a'}{r'} du'^2 - 2du' dr + r'^2 d\Omega^2$$

$$= -\frac{\rho'}{r'} \left(\frac{du'}{du}\right)^2 du^2 - 2\frac{du'}{du} dudr + r^2 d\Omega^2$$

$$\equiv -\frac{Nl_p^2}{48\pi r'^2} e^{-\frac{48\pi}{Nl_p^2}[a^2(u)-r'^2]} du^2 - 2e^{-\frac{24\pi}{Nl_p^2}[a^2(u)-r'^2]} dudr + r^2 d\Omega^2$$

$$\begin{aligned} \rho' &\equiv r' - a' = \frac{Nl_p^2}{48\pi a'} \approx \frac{Nl_p^2}{48\pi r'} \\ \frac{du'}{du} &= e^{-\frac{24\pi}{Nl_p^2}[a^2(u)-a'^2]} \approx e^{-\frac{24\pi}{Nl_p^2}[a^2(u)-r'^2]} \end{aligned}$$

Self-consistent な内部解

$$ds^2 = -e^{-\frac{24\pi}{Nl_p^2}[a^2(u)-r^2]} \left[ \frac{Nl_p^2}{48\pi r^2} e^{-\frac{24\pi}{Nl_p^2}[a^2(u)-r^2]} du + 2dr \right] du + r^2 d\Omega^2$$

Note: (1) Vaidya解 with  $a(u)$  と接続する。 (2) 古典極限とれない

# ラージNの恩恵

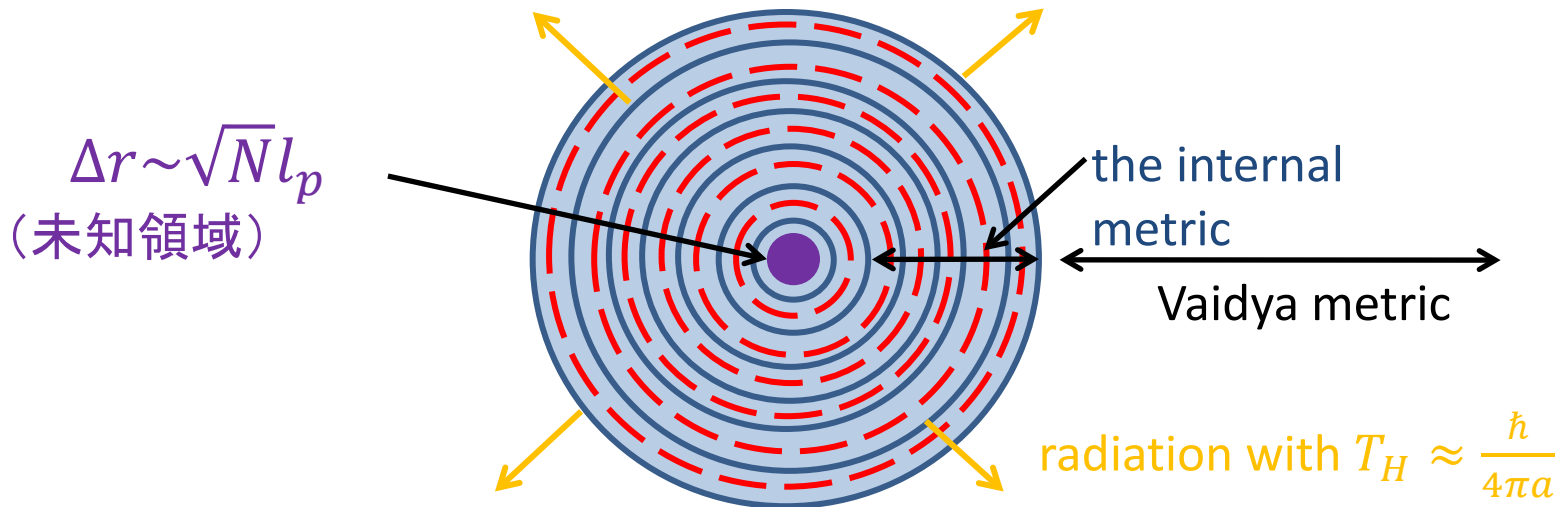
- もし物質場 $\phi$ の自由度が十分大きければ( $N \gg 100$ )、重力を量子化しなくてよい:

$$R, \sqrt{R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta}}, \sqrt{R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta}} \sim \frac{100}{Nl_p^2}$$

Schwarzschild BHの場合

$$\sqrt{R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta}} \sim \frac{a}{r^3}$$

⇒このBHは(大きな)特異点もhorizonも現れることなく、玉ねぎの皮を順に向くように、蒸発する。

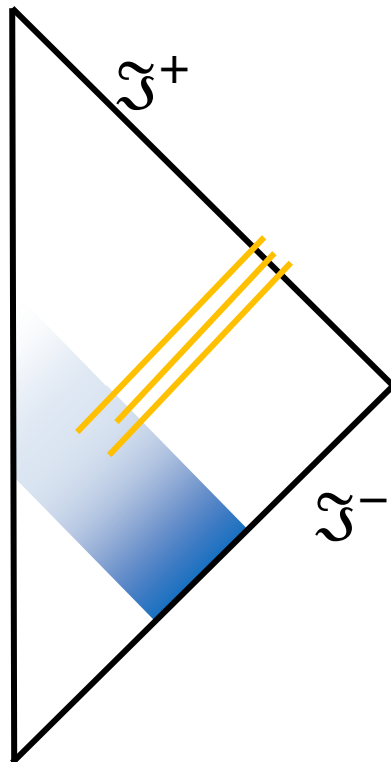
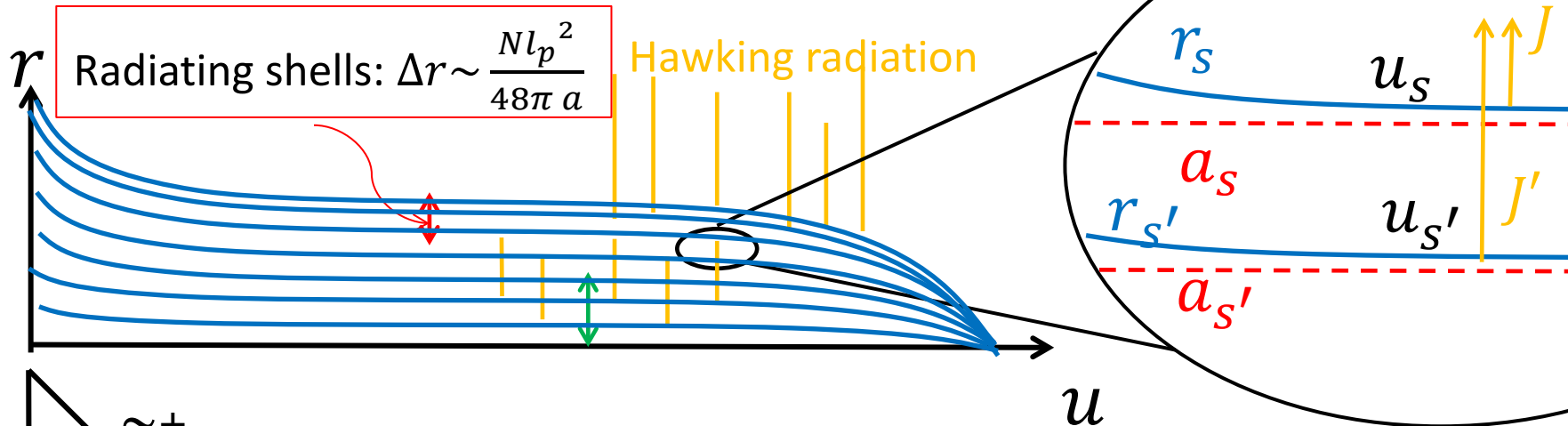


Note: 特異点定理には抵触しない。

( $\because$  エネルギー条件を見たいしているが、trapped regionが存在しないため)

## 3-5: ここまでのまとめ

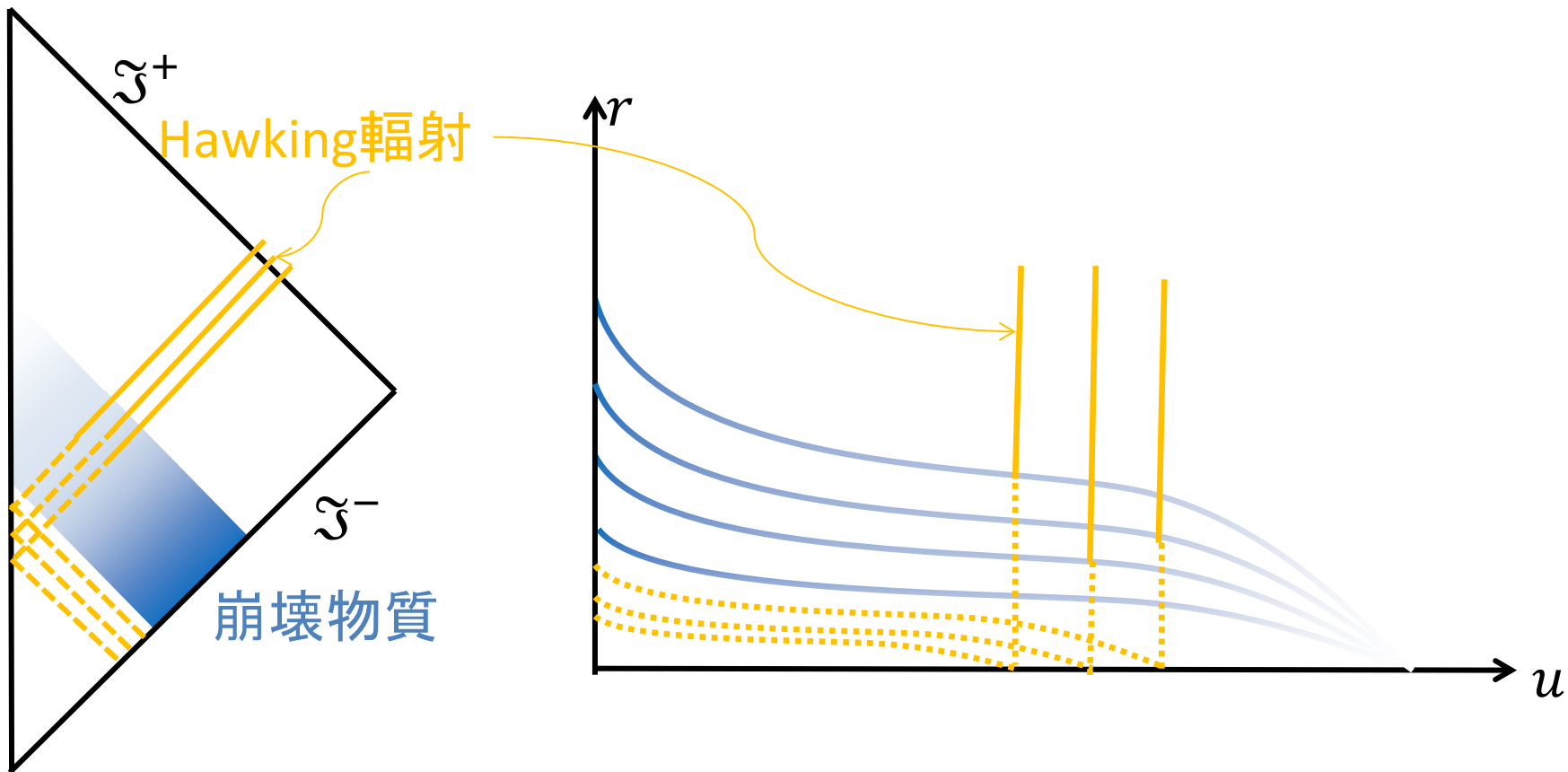
# 蒸発するBHの描像



## コメント

- このモデルはhorizonに相当するところだけでなく、BH内部全体に高エネルギーの輻射が存在する。Firewallではなく、むしろ“Fireball”である。  
⇒ Firewall-likeな物理を自然と実現するモデルでは？
- Eikonal近似⇒崩壊物質のKineticな効果+Einstein eqだけの解析  
⇒これは球対称ではユニバーサルな描像だと期待。  
⇒s波を超えるとどうなる？ Gray-body factorはどれだけ効く？

# 情報問題は怎么样了か？



このモデルでも崩壊物質のエネルギーだけが輻射として出てくるだけで、物質そのものの情報は帰ってこないように見える……？情報喪失か？

次は、Eikonal近似の範囲内で  
情報とエントロピーに迫ります！

# 8 Summary



# やったこと

- BHの形成から蒸発までを記述するself-consistentなモデルを3つの仮定の下で構成した
- BH内部を表す計量を書き下した。そのBHはhorizonも特異点も生じることなく、玉ねぎを剥くように蒸発する。
- BHエントロピーの微視的状態の数え上げ、面積則を再現した
- 相互作用モデルを構築した
- 場としての定式化をし、波の効果を考慮し、情報復帰の予想的シナリオを考えた(“冷蔵庫としてのBH”)

