

古典的BHの物理

§1. 中心対称な重力場

中心対称な重力場は、任意の中心対称な分布をした物質において生じる。



$g_{\mu\nu}(x)$ が中心から等距離な点全てで同じ。

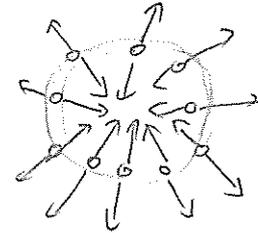
(とその運動)

↑
動径向きの変位のみのみ。

(こゝでの動径方向の選り方は任意)

↓ 最も一般的な中心対称な計量

$$ds^2 = h(t,r) dt^2 + k(t,r) (\sin^2\theta d\varphi^2 + d\theta^2) + l(t,r) dt^2 + n(t,r) dt dr.$$



diff-inv

$$\left[\begin{array}{l} r = f_2(r, t), \quad t = f_2(r, t) \\ \text{s.t. } n = 0 \quad \& \quad k = r^2. \end{array} \right] \text{ を使う.}$$

$$\therefore ds^2 = -e^{\nu(t,r)} dt^2 + e^{\lambda(t,r)} dr^2 + r^2 (\sin^2\theta d\varphi^2 + d\theta^2).$$

($dt \mapsto f(t)dt$ の任意性あり) (↑ 原点を中心とする半径 $2\pi r$ として動径方向の def を与える)

これより

$$\left\{ \begin{array}{l} G^t_t = -\frac{1}{r^2} + e^{-\lambda} \left[\frac{\lambda}{r} + \frac{1}{r^2} \right] \\ G^r_r = -\frac{1}{r^2} + e^{-\lambda} \left[\frac{\nu}{r} + \frac{1}{r^2} \right] \\ G^r_t = e^{-\lambda} \frac{\dot{\lambda}}{r} \\ G^\theta_\theta = G^\varphi_\varphi = \frac{1}{2} e^{-\lambda} \left[\nu + \frac{\nu^2}{2} + \frac{\nu - \lambda}{r} - \frac{\nu \lambda}{2} \right] - \frac{1}{2} e^{-\nu} \left[\ddot{\lambda} + \frac{\dot{\lambda}^2}{2} - \frac{\dot{\lambda} \nu}{2} \right] \end{array} \right.$$

Einstein eq $G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$

◦ 真空解

↳ $T_{\mu\nu} = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} e^{-\lambda} \left[-\frac{\lambda'}{r} + \frac{1}{r^2} \right] - \frac{1}{r^2} = 0 & \textcircled{1} \\ e^{-\lambda} \left[\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right] - \frac{1}{r^2} = 0 & \textcircled{2} \\ \lambda = 0 & \textcircled{3} \end{cases}$$

◀ energy flow が無い。∴ $\lambda = \nu$ 対応

②注 $G^0_0 = 0$ は上の3つから出ている:

$$\left. \begin{aligned} \textcircled{2} \Leftrightarrow \nu' r + 1 - e^\lambda = 0, \quad \textcircled{1} \Leftrightarrow e^\lambda = -\lambda' r + 1 \\ \Leftrightarrow \nu' r + \nu - \lambda' e^\lambda = 0, \quad \textcircled{2} \Leftrightarrow e^\lambda = \nu' r + 1 \end{aligned} \right\}$$

∴ $\nu' r + \nu - \lambda' (\nu' r + 1) = 0$

⇔ $\nu' r + 2\nu + \nu^2 r = 0$ ← 併用

一方、 $G^0_0 = 0 \Leftrightarrow \nu + \frac{\nu^2}{2} + \frac{\nu - \lambda}{r} - \frac{\nu \lambda}{2} = 0$

⇔ $\nu' + \nu^2 + \frac{2\nu}{r} = 0$ ← 同C //

$\nu + \lambda = 0$

③ ⇒ $\lambda = \lambda(r)$

④ ⇒ $\lambda + \nu = f(t) = 0$

($dt \mapsto h(t) dt$ の任意性を使って。これ)

diff-invariant
◀ t-依存性消える!

∴ $\lambda(r) = -\nu(r)$

①を積分して

$e^{-\lambda} = e^\nu = 1 + \frac{C}{r}$

$\xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$

◀ 自動的に漸近的平坦

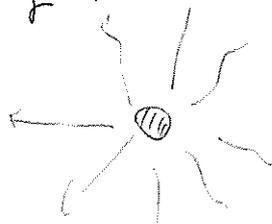
ここで

場の弱い遠方で Newton 法則を要求すると、 $\left[r \text{ 方向 } k_C \right]$

② $\Lambda = 0$

$g_{tt} = -[1 + 2\phi], \quad \phi = -\frac{Gm}{r}$

∴ $g = -2Gm$



◀ この m は、Newton 則の位で
動を発生させる源となる
質量をいふ。

* 積分は...

$$\left(\begin{aligned} \textcircled{1} \Leftrightarrow \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} [r e^{-\lambda(r)}] &= \frac{1}{r^2} \\ \Leftrightarrow \frac{d}{dr} [r e^{-\lambda(r)}] &= 1 \Rightarrow r e^{-\lambda(r)} = r + C, \quad \therefore e^{-\lambda} = 1 + \frac{C}{r} \end{aligned} \right)$$

ゆえに Schwarzschild 計量

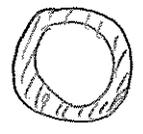
$$ds^2 = -\left(1 - \frac{a}{r}\right) dt^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{a}{r}\right)} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

$$a \equiv \frac{2Gm}{c^2}$$

任意の中心対称分布した matter の外側真空中の重力場は、常に静的であり、これに等しい。 [バーコフの定理]



⑤ 先の $e^{-\lambda} = e^\nu = 1 + \frac{c}{r}$ の c を決めるとき、右図の内部の場合には、 $c = 0$ となる。なぜならば $r \rightarrow 0$ で特異点になるからだ。よって、内部に重力場なし。



Box. $-g_{00} = 1 + \frac{2\phi}{c^2}$

重力場中の非相対論的粒子のラグランジアンは、

$$L = -mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 - m\phi$$

$$\Rightarrow S = \int dt L = -mc \int dt \left[c - \frac{v^2}{2c} + \frac{\phi}{c} \right]$$

これを、 $S = -mc \int d\tau$ とおくと、

$$d\tau = \left(c - \frac{v^2}{2c} + \frac{\phi}{c} \right) dt$$

$$\xrightarrow{c \rightarrow \infty} ds^2 = -d\tau^2 = -\left(c^2 + 2\phi\right) dt^2 + \frac{v^2 dt^2}{d\beta^2}$$

$$= -\left[1 + \frac{2\phi}{c^2}\right] c^2 dt^2 + d\beta^2$$

よって、 $c \rightarrow \infty$ でおくと、

$$-g_{00} = 1 + \frac{2\phi}{c^2}$$

物理的特徴

固有時間 $d\tau = \sqrt{1 - \frac{a}{r}} dt < dt$

固有長さ $dR = \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{a}{r}}} > dr$

内部解

中心対称な重力場を生む物質内部の様子も、一般に言えることがある。

$$-\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2} \partial_r (e^{-\lambda} r) = 8\pi G T^t_t$$

$\lambda \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$ が小さくとも r^2 程度の速さで生じないと、

$T^t_t \rightarrow \infty$ となり特異点になる。

そこで $\lambda|_{r=0} = 0$ の b.c. の下で積分すると、

$$\lambda(r) = -\log \left[1 - \frac{8\pi G}{r} \int_0^r dr' r'^2 (-T^t_t) \right]$$

$$\rho = -T^t_t = \rho$$

Box $\rho = -T^t_t$

$U = e^{-\frac{\lambda}{2}} \partial_t$ は、 $U^2 = -1$ を満たす proper observer である。

$j^\mu = T^\mu_\nu U^\nu$ は、この observer に proper energy-momentum 4 vector である。

また $U = U_\mu dx^\mu = -e^{\frac{\lambda}{2}} dt$ は、 $t = \text{const}$ である。

よって、 j^μ のうち、 $t = \text{const}$ 上での成分、つまり energy は

$$d\Sigma_\mu = -n_\mu \sqrt{|d^3x|}$$

$$\rho = -j^\mu U_\mu = T^\mu_\nu U^\nu U_\mu = -T^t_t \geq 0 \quad \leftarrow \text{条件}$$

これが proper energy density for matter である。

$$\text{よって、} \lambda = -\log \left[1 - \frac{8\pi G}{r} \int_0^r dr' r'^2 \rho \right] \geq 0$$

$$\therefore \boxed{-g_{rr} = e^\lambda \geq 1} \quad \leftarrow \text{内部は外部より固有長さの大きい}$$

±5に

$$\frac{e^{-\lambda}}{r} (\lambda + \nu) = 8\pi G (-T^t_t + T^r_r) = 8\pi G [\rho + P_r] \geq 0$$

$$\therefore \partial_r (\lambda + \nu) \geq 0 \quad \leftarrow \begin{matrix} \lambda \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0 \\ \nu \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0 \end{matrix} \quad \leftarrow \text{energy 条件} \quad \leftarrow \text{遠くで非カリウ的}$$

$$\Rightarrow \lambda + \nu \leq 0$$

$$\therefore \nu \leq -\lambda \leq 0$$

$$\therefore \boxed{-g_{tt} = e^\nu \leq 1} \quad \leftarrow \text{内部は外部より時間がゆっくりになる}$$

今、この重力源となる matter が半径 R の球形物体とあり、



$r > R$ の点に対し

$$\lambda_{(t,r)} = -\log \left[1 - \frac{8\pi G}{r} \int_0^R dr' r'^2 \rho \right]$$

しかし、その点は真空解として Sch metric 存のて、

$$\lambda_{(t,r)} = -\log \left[1 - \frac{2GM}{r} \right] \quad \text{であるはず。}$$

よって両者を比べて、

$$M = 4\pi \int_0^{R(t)} dr' r'^2 \rho(r', t) \quad \text{--- } \star \text{ ---}$$

を得る。

ここで 真空解で決めた M は、定数であった。

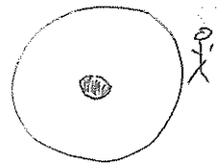
もし半径 $R = \text{const}$ ならば、両辺 ∂_t すると、 $\partial_t \rho = 0$ 。を得る。

もし $R = R(t)$ ならば、 $0 = 4\pi R^2 \rho(R(t), t) \frac{dR}{dt} + 4\pi \int_0^{R(t)} dr' r'^2 \left(\frac{\partial}{\partial t} \rho(r', t) \right)$

もし大きくなる ($\frac{dR}{dt} > 0$) と、密度は小さくなる ($\frac{\partial}{\partial t} \rho < 0$)

もう一つ注目すべきは、

M は、系を遠くからみて重力場が弱くなったところでは、Newton 重力を生む源 (重力質量) として導入した。



これは、matter + 重力場の合計のエネルギー である。

ADM energy

しかし、フリーは曲がった時空中の proper なスカラー量の積分は $\int dV$ で行う:

$$M_{\text{proper}} \equiv 4\pi \int_0^R dr' r'^2 \sqrt{g_{rr}} \rho \quad \geq \quad 4\pi \int_0^R dr' r'^2 \rho = M$$

この分の差 $\Delta M \equiv M_{\text{proper}} - M \geq 0$ は、重力的質量欠損 を表している。

$(g_{rr} \geq 1)$ 、
 ↑
 あたりも十分に matter が詰って平坦時空中で蓄積に足っただけの energy.

つまり、結合した分だけ energy が入る。

だが、

 をいたと思えば、このミで自然である

§3. Kruskal coordinates. & Causal structure

「light-cone = 45°」を保つ, BHの内と外を表す coordinates を探す.
 ⇒ 因果構造がわかりやすい.

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{a}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

$$= -\left(1 - \frac{a}{r}\right) \left[dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{a}{r}\right)^2} \right] + r^2 d\Omega^2.$$

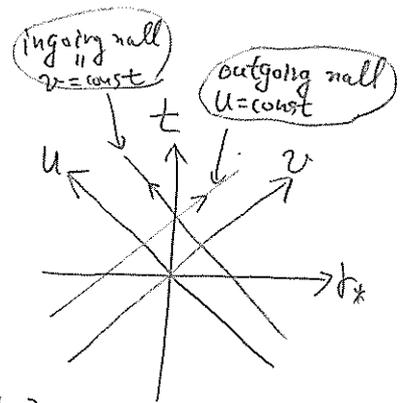
$$dt^* \equiv \frac{dr}{1 - \frac{a}{r}}$$

$$\Rightarrow r^* = r + a \log \left| \frac{r-a}{a} \right| \quad \leftarrow \text{Regge-Wheeler radial coordinate.}$$

$$\left. \begin{array}{l} r \mid a \rightarrow \infty \\ r^* \mid -\infty \rightarrow \infty. \end{array} \right\}$$

±51 = .

$$\boxed{\begin{array}{l} u \equiv t - r^* \\ v \equiv t + r^* \end{array}}$$



$$\therefore ds^2 = -\left(1 - \frac{a}{r}\right) (dt - dr^*)(dt + dr^*) + r^2 d\Omega^2$$

$$= -\left(1 - \frac{a}{r}\right) du dv + r^2 d\Omega^2 \quad \leftarrow \text{ここで } r(u, v)$$

ここで $r=a$ の特異性を取り除く座標をみつけるために
 一時的に $r \approx a$ に注目すると.

$$\Rightarrow r^* \simeq a \log \left| \frac{r}{a} - 1 \right|$$

$$\Leftrightarrow \frac{t}{a} \simeq 1 \pm e^{\frac{r^*}{a}} = 1 \pm e^{\frac{v-u}{2a}} \Rightarrow \frac{a}{r} = \left(1 \pm e^{\frac{v-u}{2a}}\right)^{-1}$$

$\left. \begin{array}{l} +: r > a \\ -: r < a \end{array} \right\}$
 $r^* = \frac{1}{2}(v-u)$
 $\simeq 1 \mp e^{\frac{v-u}{2a}}$

$$\therefore 1 - \frac{a}{r} \simeq \pm e^{\frac{v-u}{2a}}$$

577

$$ds^2 \simeq \mp \left(e^{-\frac{u}{2a}} du \right) \left(e^{\frac{v}{2a}} dv \right) + r^2 d\Omega^2$$

そこで $\boxed{U \equiv \mp e^{-\frac{u}{2a}}, V \equiv e^{\frac{v}{2a}}}$ を導入すると、
 $\Rightarrow dU = \pm \frac{1}{2a} e^{-\frac{u}{2a}} du, dV = \frac{1}{2a} e^{\frac{v}{2a}} dv$.

$\therefore ds^2 \simeq \mp (\pm 2a du)(2a dv) + r^2 d\Omega^2$ ✓ 終了
 $= -4a^2 du dv + r^2 d\Omega^2$.

これは $r=a$ 直上で "coordinate singularity" 有り!

次に、上の (U, V) の Def を用いて

$(u, v) \mapsto (U, V)$ を $\forall r > 0$ に対し 行える。

まず、 $UV = \mp e^{\frac{v-u}{2a}} = \mp e^{\frac{r}{a}} = \mp e^{\frac{r}{a} + \log|\frac{r}{a}-1|} = \mp e^{\frac{r}{a}} [\pm(\frac{r}{a}-1)]$

つまり、 $\boxed{e^{\frac{r}{a}}(\frac{r}{a}-1) = -UV}$ から $r(U, V)$ を与える。

よって

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\left(1 - \frac{a}{r}\right) du dv + r(u, v)^2 d\Omega^2 \\ &= -\frac{a}{r} \underbrace{\left(\frac{r}{a}-1\right)}_{-UV e^{-\frac{r}{a}}} (-2aU dU) 2aV dV + r^2 d\Omega^2 \\ &= -\frac{4a^3}{r} e^{-\frac{r}{a}} dU dV + r^2 d\Omega^2 \end{aligned}$$

$\therefore \boxed{ds^2 = -\frac{4a^3}{r} e^{-\frac{r}{a}} dU dV + r^2 d\Omega^2}$ ◀ Kruskal coordinate
 更に $r(U, V)$ は $e^{\frac{r}{a}}(\frac{r}{a}-1) = -UV$

Kruskal diagram

$$ds^2 = -\frac{4a^3}{r} e^{-\frac{r}{a}} dUdV + r^2 d\Omega^2$$

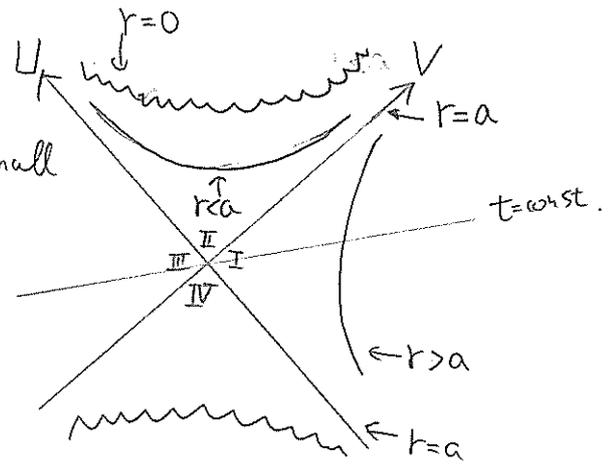
• $U = \text{const}$: outgoing null, $V = \text{const}$: ingoing null

• $e^{\frac{r}{a}} (\frac{r}{a} - 1) = -UV$ 対し

$r = \text{const} \Leftrightarrow UV = \text{const}$

• $\frac{V}{U} = \mp e^{\frac{2U}{2a}} = \mp e^{\frac{t}{a}}$ より

$t = \text{const} \Leftrightarrow \frac{V}{U} = \text{const}$



特に $r=a \Leftrightarrow U=0$ or $V=0$

↳ event horizon 対称

$r=0 \Leftrightarrow UV=1$

↳ 特異点は spacelike

$$\left(\begin{aligned} ds^2 &= -\frac{4a^3}{r(r=0)} dUdV & 0 &= dUV + UdV \\ &= \frac{4a^3}{r(r=0)} \frac{U^2}{V} dU^2 > 0 \end{aligned} \right)$$

おととの (t,r) は I のみ

= (U,V) は I と II

しかし、 $V < 0$ も解析接続すると、III、IV も表せる。

∴ Γ maximal extended Sch BH = I ∪ II ∪ III ∪ IV を得る。

↳ たが、現実では III、IV は collapsing matter でカバーされる。

• Penrose diagram .

因果構造を変えず、光線 = 45° を保ったまま、
 Δ が ∞ を有限のサイズの図に表したい。

$(U, V) \rightarrow (\tilde{U}, \tilde{V})$ を考える:

$$\tilde{U} \equiv \arctan U, \quad \tilde{V} \equiv \arctan V$$

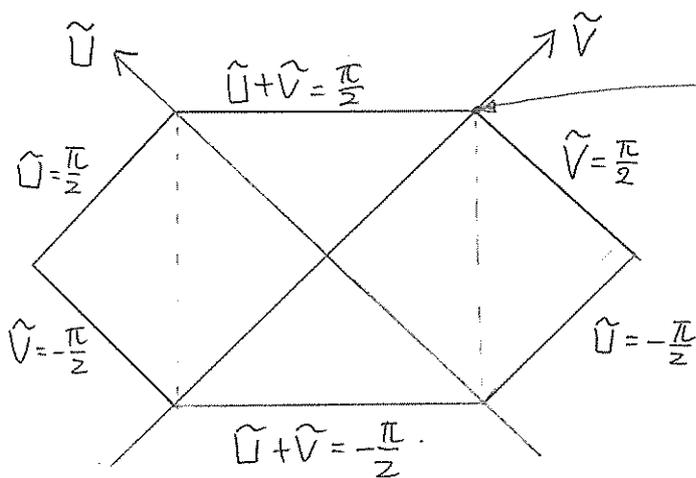
これは、光線 = 45° を保ち、 Δ が ∞ を有限サイズにしている:

$$-\infty < U < \infty \quad | \quad U = 0 \quad | \quad UV = 1$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} < \tilde{U} < \frac{\pi}{2} \quad | \quad \Leftrightarrow \tilde{U} = 0 \quad | \quad \Leftrightarrow \tilde{U} + \tilde{V} = \pm \frac{\pi}{2}$$

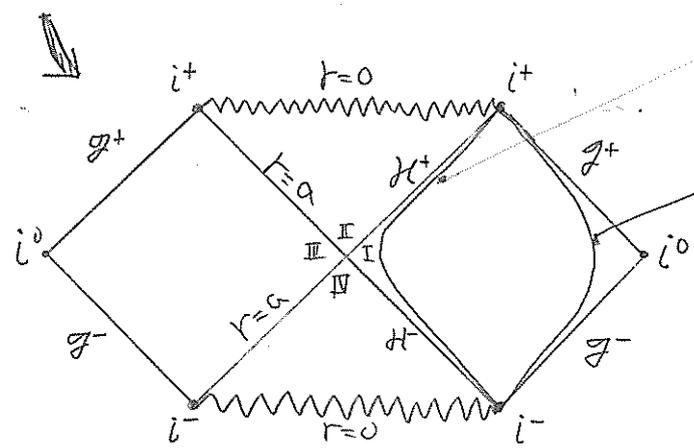
$\swarrow U > 0$
 $\searrow U < 0$

$$\left[\begin{array}{l} \text{ここで公式 } \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \pm \frac{\pi}{2} \quad \left. \begin{array}{l} x > 0 \\ x < 0 \end{array} \right\} \text{ 区 } \\ UV = 1 \Leftrightarrow V = \frac{1}{U} \text{ を使った} \end{array} \right]$$



(特異的な変換になっている。
 $U=0 \Leftrightarrow r=a$
 $UV=1 \Leftrightarrow r=0$) が合っている)

(各点は S^2)



($r = \text{const} \geq a$ に止まっている)

($r = \text{const} < a$ に止まっているの) timelike curve

- g^+ : Future null infinity $V = \infty, U = \text{finite}$
- g^- : Past $V = \text{finite}, U = -\infty$
- i^0 : Spatial infinity $r = \infty, t = \text{finite}$
- i^+ : Future timelike infinity $r = \text{finite}, t = \infty$
- i^- : Past $r = \text{finite}, t = -\infty$

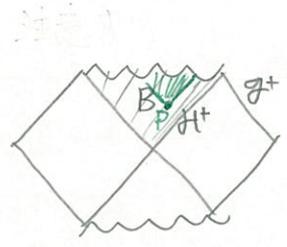
§.4, Horizons.

• BHの一般的定義

black hole region $B \equiv M - J^-(\mathcal{H}^+)$
 event horizon $\mathcal{H}^+ \equiv \dot{J}^-(\mathcal{H}^+) \cap M$

M : 時空の全体
 $J^-(\mathcal{H}^+)$: \mathcal{H}^+ の因果的カコ領域
 $\dot{J}^-(\mathcal{H}^+)$: 集合 S のboundary

(つまり、BHとは、無限遠の観測者は決して因果的に関係しない領域のことであり、event horizonとは、その境界となる光の面である。

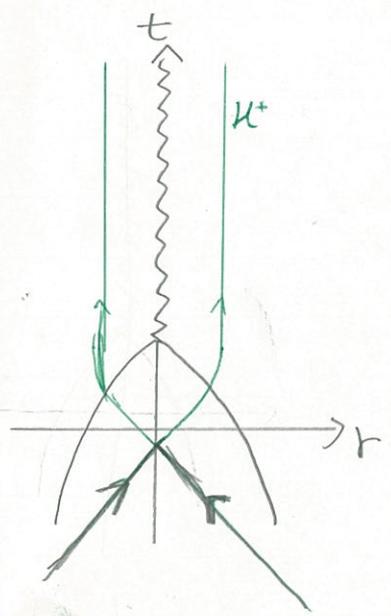


- 点 $P \in B$ から発せられる光は決してその定義からして、 $t = \infty$ まで待っても、 \mathcal{H}^+ の人には届かない。
 → まさに black hole!

- 逆に B 内の任意の点から始まり全ての事象は、必ず $r=0$ に達する。

注意: 「event horizon は teleological である!」
 acausal

⇒ $t = \infty$ までをみて始めてその位置が特定できる global から acausal な概念である!



準備：粒子生成の具体例(1)

- 古典的外場 $J(t)$ の下での調和振動子の量子力学をHeisenberg描像で考える:

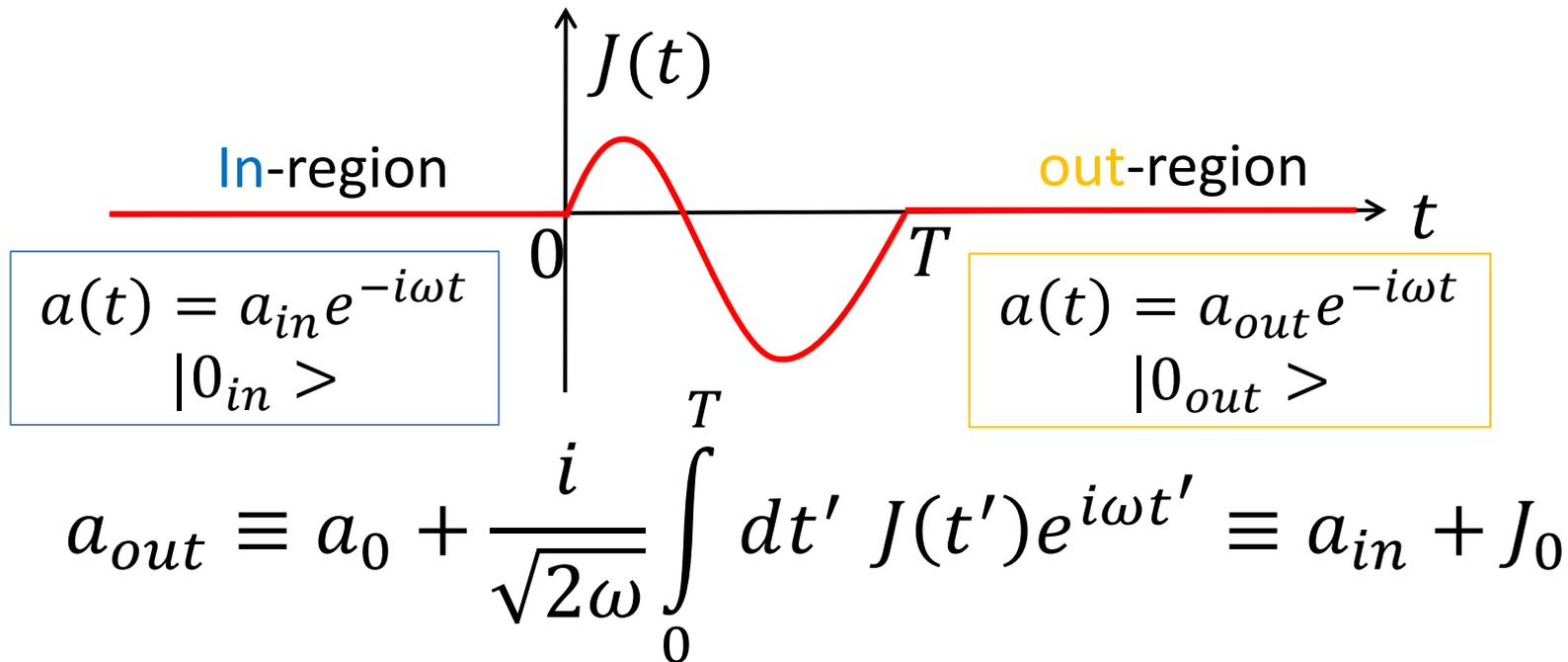
$$H = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\omega^2 q^2 - J(t)q$$

- $a(t) \equiv \sqrt{\frac{\omega}{2}} \left(q(t) + \frac{i}{\omega} p(t) \right), [a(t), a^\dagger(t)] = 1$
 $\Rightarrow H = \omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) - \frac{J(t)}{\sqrt{2\omega}} (a + a^\dagger)$

- $\frac{da}{dt} = -i\omega a + \frac{i}{\sqrt{2\omega}} J(t)$
 $\Rightarrow a(t) = \left[a_0 + \frac{i}{\sqrt{2\omega}} \int_0^t dt' J(t') e^{i\omega t'} \right] e^{-i\omega t}$

準備：粒子生成の具体例(2)

- 古典的外場 $J(t)$ として次のものを考える:



- Heisenberg描像として状態は変わらないが、その解釈が変わる:

$$|\psi \rangle = |0_{in} \rangle$$

準備：粒子生成の具体例(3)

- 粒子数演算子 $N(t) \equiv a^\dagger(t)a(t) = \begin{cases} a_{in}^\dagger a_{in} & \text{for } t < 0 \\ a_{out}^\dagger a_{out} & \text{for } T < t \end{cases}$

- out-regionでは粒子が生成されている:

$$\langle 0_{in} | N(t) | 0_{in} \rangle = \begin{cases} 0 & \text{for } t < 0 \\ |J_0|^2 & \text{for } T < t \end{cases}$$

- 実際に外場により、多粒子状態になっている:

$$|0_{in} \rangle = \exp \left[-\frac{1}{2} |J_0|^2 + J_0 a_{out}^\dagger \right] |0_{out} \rangle$$

粒子生成のポイント

- In,out-regionで明確に粒子が定義できること
- (非断熱的に)時間変化する外場が作用する
- 外場も含めた系全体でエネルギーは保存する
(\Rightarrow back reactionの問題へ)

Hawkingの考えたこと



event horizon

τ

- 時間変化する重力崩壊中の時空上で、真空状態の量子場の時間発展を解いた
⇒ 遠くの観測者は粒子生成をみる

BH領域

BH時空

← 崩壊物質
= 外場としてエネルギー注入

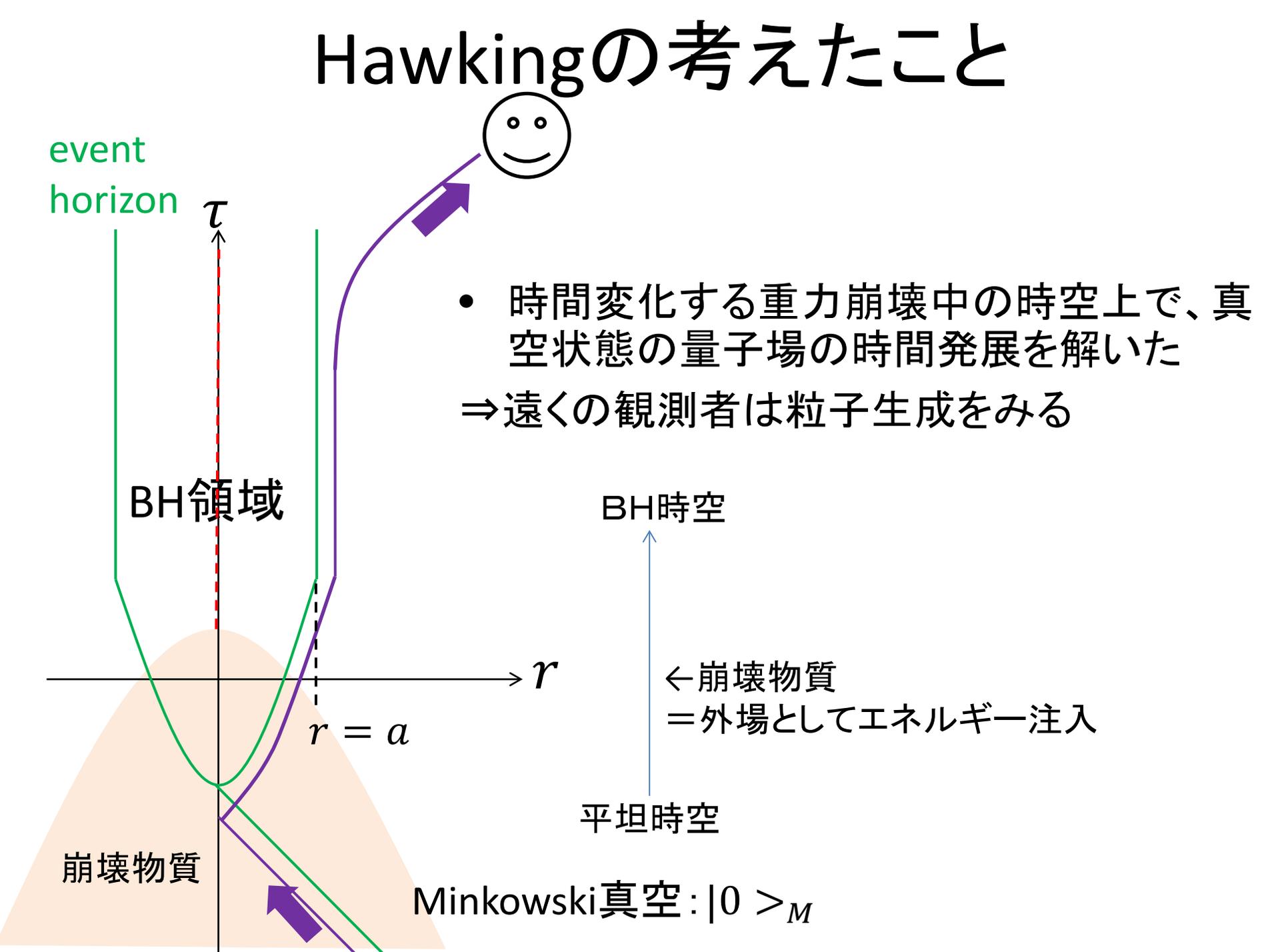
平坦時空

崩壊物質

Minkowski真空: $|0\rangle_M$

r

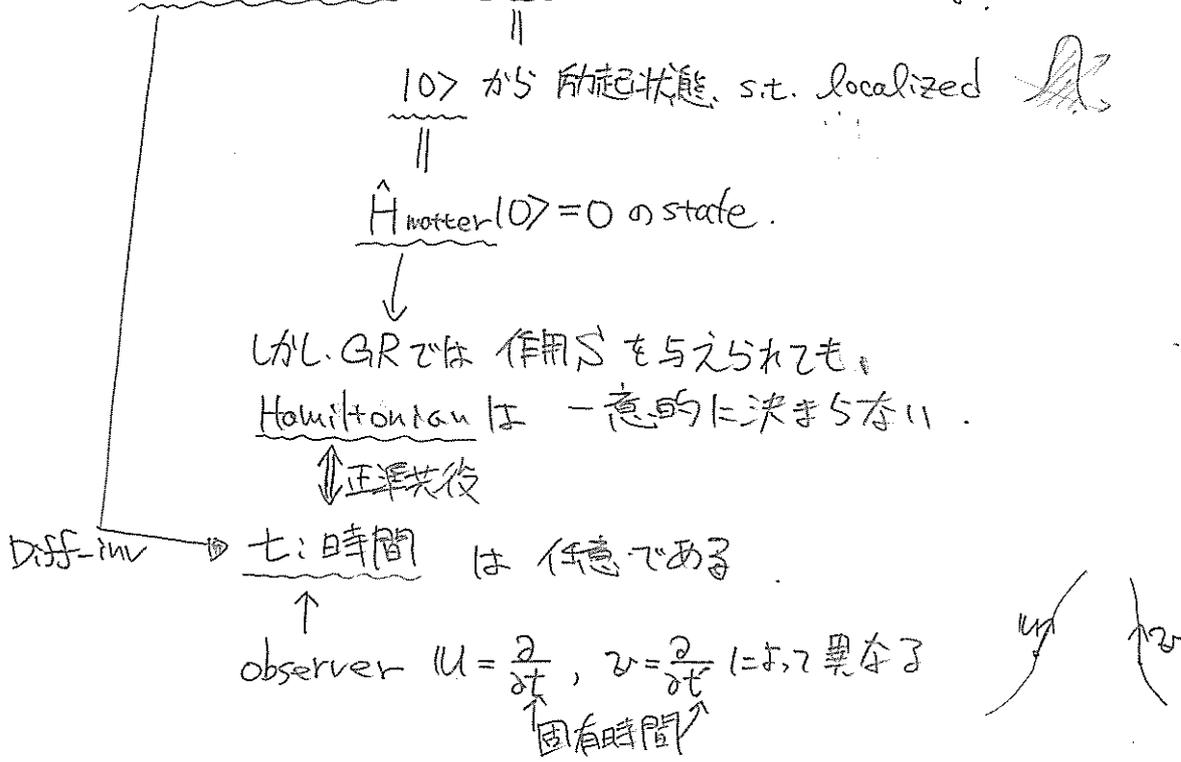
$r = a$



3. QFT in curved space の basic

3-1: 基本的な行

問. 曲がった空間上で 粒子を どのように定義する?



\Rightarrow 実際上、 $\left\{ \begin{array}{l} \text{observer time vector } t \\ \text{unit normal vector } n \end{array} \right.$ と定めると、作用 S の Hamiltonian 作 \bar{c} れる。
 $n^2 = -1$

\Rightarrow 粒子状態を定めるには、上で作 \bar{c} った H を用いて、ある spacelike hypersurface Σ_0 上で

$$\hat{H}|0\rangle = 0 \quad \text{を設定し、}$$

その上で
$$\phi(x) = \sum_n [f_n(x) a_n + f_n^*(x) a_n^\dagger]$$

s.t.
$$\left\{ \begin{array}{l} a_n|0\rangle = 0 \\ \nabla^2 f_n(x) = 0 \\ (f_n, f_m) = \delta_{nm}, \quad (f_n^*, f_m^*) = -\delta_{nm}, \quad (f_n, f_m^*) = 0 \\ \mathcal{L}_\pm f_n(x) = -i\omega_n f_n(x), \quad (\omega_n \geq 0) \end{array} \right.$$

と展開したときの、 $a_n^\dagger|0\rangle$ が 1 粒子状態である。

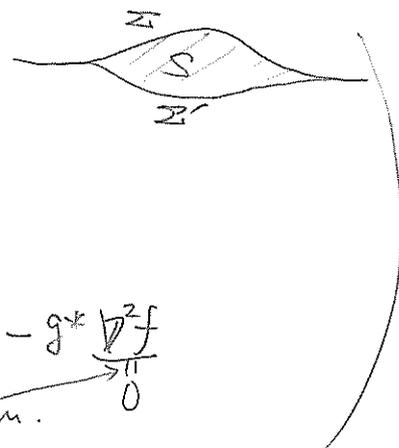
(observer t による Σ_0 上での)

ここで Klein-Gordon 内積
 $(f, g) \equiv -i \int_{\Sigma} d\Sigma^\mu (f \nabla_\mu g^* - g^* \nabla_\mu f)$
 $\Sigma \leftarrow$ Cauchy surface

$$d\Sigma_\mu = -n_\mu \sqrt{|h|} d^3x, \quad g_{\mu\nu} = -n_\mu n_\nu + h_{\mu\nu}.$$

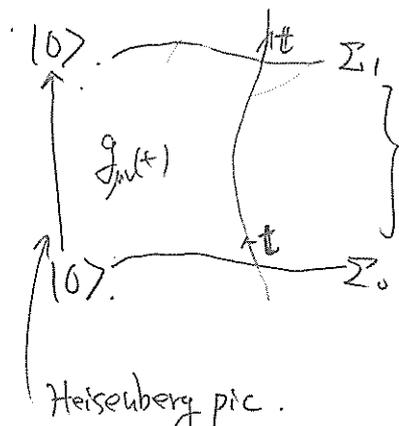
実は、 Σ の向きにより内積に符号が異なる

proof $(f, g)_{\Sigma_1} - (f, g)_{\Sigma_0}$



$$\begin{aligned}
 &= -i \int_{\Sigma_1 - \Sigma_0} d\Sigma^\mu (f \nabla_\mu g^* - g^* \nabla_\mu f) \\
 &= -i \int_{\Sigma_0} d^3x \sqrt{|h|} \nabla_\mu [f \nabla^\mu g^* - g^* \nabla^\mu f] \\
 &= 0 \quad \text{e.o.m.}
 \end{aligned}$$

さて、実際の問題では...



Heisenberg pic.

外場として $g_{\mu\nu}(t)$ が変化する。

- 通常は、
 - $\Sigma_0 = \Sigma_{t=-\infty}$
 - $\Sigma_1 = \Sigma_{t=+\infty}$
 - $g_{\mu\nu}(t)$ はこの間の有限区間で変化
 - t は漸近平坦。

もう一度、 Σ_1 上で mode 展開、

$$\phi(x) = \sum_n [P_n^\omega b_n + P_n^{\omega'} b_n^\dagger]$$

$$\text{s.t. } \begin{cases} b_n |0\rangle = 0 \\ \mathcal{L}_t P_n = -i\omega_n P_n \\ \nabla^2 P_n = 0 \\ (P_n, P_m) = \delta_{nm}, (P_n^*, P_m^*) = -\delta_{nm}, (P_n, P_m^*) = 0. \end{cases}$$

\Rightarrow この $P_n^{\omega'}$ は Σ_1 での 1 粒子状態であり、

これは $f_{in}(x)$ とは一般に異なる。

なせならば、 $\nabla^2 \phi(x) = 0$ に従って時間発展する間に、 $g_{\mu\nu}(t)$ の変化により、1 mode の形が変わるから。

⇒ Heisenberg picture では、始めの $|0\rangle$ は fix してある。

しかし時間たつた \mathcal{H}_t では b_n が $t=0$ の 1-mode である。

∴ $\langle 0 | b_n^\dagger b_n | 0 \rangle \neq 0$ ならば ($t=0$ の) 粒子が生成されたことに等しい。

これを定量的に評価するのが、Bogoliubov 変換である。

3-2: Bogoliubov 変換

$\{f_n\}$ は完全系なので $P_n(x)$ も展開できる:

$$P_n(x) \equiv \sum_m [\alpha_{nm} f_m(x) + \beta_{nm} f_m^*(x)]$$

$$\Rightarrow b_n = \sum_m [\alpha_{nm}^* a_m - \beta_{nm}^* a_m^\dagger]$$

($\phi(x)$ を両辺に作用させると)

よって

$$\langle 0 | b_n^\dagger b_n | 0 \rangle = \sum_m |\beta_{nm}|^2 \quad \text{となる。}$$

⇒ 問題は、

$$\beta_{nm} = -(f_m^*, P_n) \quad \text{を評価すること。}$$

ただしこのとき、 $g_{\mu\nu}(t)$ の中での $\nabla^2 \phi = 0$ を解かねばならない。

3-3: 真空同士の関係

2つの真空 $a|0\rangle_a = 0$, $b|0\rangle_b = 0$ がどのように
互いに関係しているか?

$$a = \alpha^* b - \beta^* b^\dagger$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0 &= a|0\rangle_a \\ &= (\alpha^* b - \beta^* b^\dagger) |0\rangle_a \\ &= (\alpha^* b - \beta^* b^\dagger) F(b^\dagger) |0\rangle_b \\ &= \left[\alpha^* \frac{\partial F}{\partial b^\dagger} - \beta^* b^\dagger F \right] |0\rangle_b \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \alpha^* \frac{\partial F}{\partial b^\dagger} - \beta^* b^\dagger F = 0 \quad \leftarrow F \text{ は } b^\dagger \text{ だけを含む}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial b^\dagger} = \alpha^* - \beta^* b^\dagger F$$

$$\therefore F(b^\dagger) = c e^{\frac{1}{2} \alpha^* - \beta^* b^\dagger}$$

$$\therefore |0\rangle_a = c e^{\frac{1}{2} \alpha^* - \beta^* b^\dagger} |0\rangle_b$$

物理的には、 $b_k^\dagger b_{-k}^\dagger$ の pair で必ず出る。

3-4: $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ と back reaction problem

$$\text{effective action } e^{i\Gamma[g]} = e^{iS_{EH}[g]} \int \mathcal{D}\phi e^{iS_M[\phi;g]}$$

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\delta \Gamma}{\delta g^{\mu\nu}} &\Rightarrow \int G_{\mu\nu} = 8\pi G \langle \hat{T}_{\mu\nu} \rangle \\ \left\langle \hat{T}_{\mu\nu}(x) \right\rangle &= \frac{\int \mathcal{D}\phi e^{iS_M} T_{\mu\nu}}{\int \mathcal{D}\phi e^{iS_M}} \end{aligned}$$

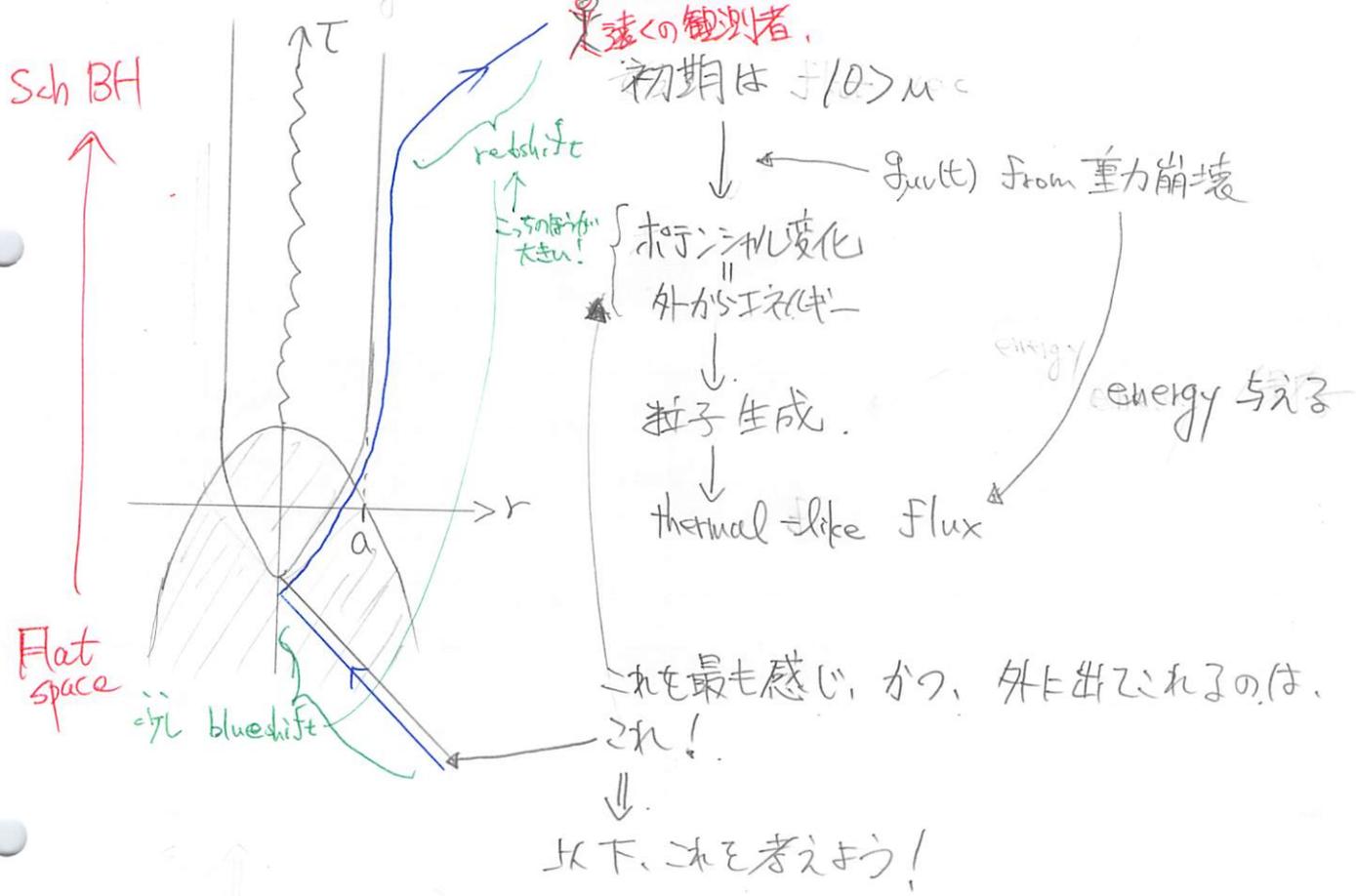
一般には、 $\Gamma[g]$ や $\langle \hat{T}_{\mu\nu} \rangle$ を求めるのは難しい $\rightarrow \Gamma[\phi(x)\phi(x)] \xrightarrow{h \rightarrow 0} \Delta_0$ とするから

Hawking の原論文
 "Particle Creation by Black Holes" のキ"ロ"
 Commun. math. Phys. 43, 199-220 (1975)

1. 物理的状況

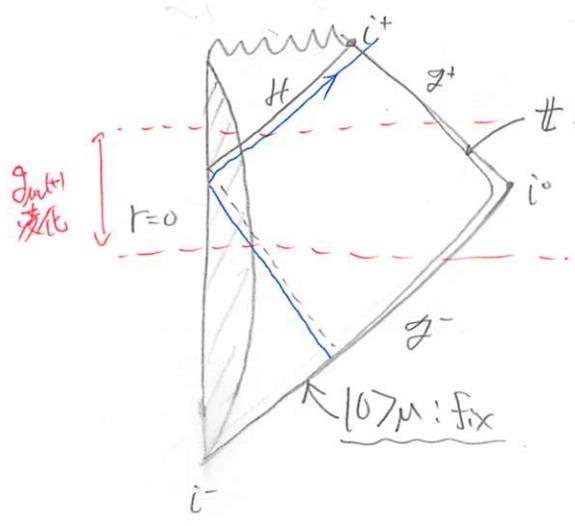
球状重力崩壊中に QFT を考えると、何か生じるか？
 遠くの観測者は何を観測するか？

→ Thermal-like radiation



↓
 以下、これを考えよう!

2. 作り方



一般論に従って、

(1) 遠くの observer (I) $\Sigma_0 = \mathcal{I}^-$ と $\Sigma_1 = \mathcal{I}^+ \cup H$ の両方で $\phi(x)$ をモード展開する。

(2) この波を $\nabla^2 \phi = 0$ と解く

(3) $\beta_{\text{Boul}} \Sigma$ と評価。

をしよう。

3. モード展開

ミンコフスキー空間での展開

$$\phi(x) = \sum_n [f_n(x) a_n + f_n^*(x) a_n^\dagger]$$

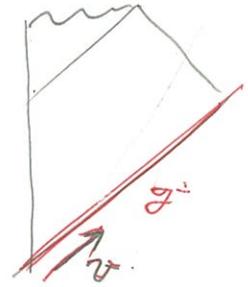
ingoing mode: $\frac{\partial}{\partial v} f_n = -i\omega_n f_n \quad (\omega_n > 0) \Rightarrow$

$$\left[\text{Minkowski vacuum} \right] \\ a_n |0\rangle_M = 0, \forall n$$

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad v \equiv t+r$$

$\therefore v$ は canonical affine parameter である。
on \mathcal{I}^-

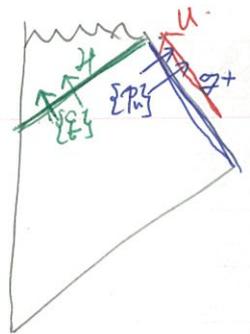
$\therefore \{f_n\}$ は Cauchy data を完全 (= 与える)。



$\Sigma_1 = \mathcal{I}^+ \cup \mathcal{H}$

$$\phi(x) = \sum_n [P_n(x) b_n + P_n^*(x) b_n^\dagger + \underbrace{p_n(x)}_{\text{purely ingoing}} c_n + \underbrace{p_n^*(x)}_{\text{purely outgoing}} c_n^\dagger]$$

$\left(\begin{array}{l} \text{purely outgoing} \\ \Rightarrow \mathcal{H} \text{ の Cauchy data を与える} \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{l} \text{purely ingoing} \\ \Rightarrow \mathcal{I}^+ \text{ は与える} \end{array} \right)$



outgoing mode: $\frac{\partial}{\partial u} P_n = -i\omega P_n, \quad \omega > 0.$

$u \equiv t - r_*$ $\leftarrow \mathcal{I}^\pm$ の null geodesic の canonical affine parameter.

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{a}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

$$r_* \equiv r + a \log \left| \frac{r}{a} - 1 \right|$$

$\therefore \{b_n, b_n^\dagger\}$ は \mathcal{I}^\pm の outgoing particle に対応する。

だが、 $\{p_n\}$ はどのような正振動数条件を課するか、明らかでない。

なぜなら、 $r \gg a$ の人で考える場合、 p_n はよくわからない。

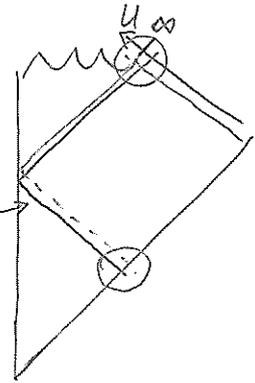
\rightarrow 今は何も条件を課する必要ない。

• Bogoliubov変換

$$\begin{cases} \varphi_n(x) = \sum_m [\alpha_{nm} f_m(x) + \beta_{nm} f_m^*(x)] \\ \xi_n(x) = \sum_m [\gamma_{nm} f_m(x) + \eta_{nm} f_m^*(x)] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b_n = \sum_m [\alpha_{nm}^* a_m - \beta_{nm}^* a_m^\dagger] \\ c_n = \sum_m [\gamma_{nm}^* a_m - \eta_{nm}^* a_m^\dagger] \end{cases}$$

特に、 $\beta_{nm} = -(f_m^*, \varphi_n)$ の、 ξ に
 1 電子対部分が含まれる。



それは、 $r \rightarrow \infty$ の漸近形での 1 粒子モードである。

その形は、 $\phi = \frac{\varphi_{2em}(t,r)}{r} Y_{lm}(\theta, \varphi)$ とおいて、

$$0 = \nabla^2 \phi \Leftrightarrow [\partial_t^2 - \partial_{r_*}^2] \varphi_{2em} + f(r) \left[\frac{f'(r)}{r} + \frac{l(l+1)}{r^2} \right] \varphi_{2em} = 0 \quad f = 1 - \frac{2M}{r}$$

$$\xrightarrow{r \rightarrow \infty} [\partial_t^2 - \partial_{r_*}^2] \varphi_{2em} = 0.$$

また、

$$\begin{cases} \varphi_{\omega 2em} \sim \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} \frac{e^{-i\omega u}}{r} Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad \text{near } \mathcal{I}^+ \\ f_{\omega 2em} \sim \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} \frac{e^{-i\omega v}}{r} Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad \text{near } \mathcal{I}^- \end{cases}$$

(注) 以下では $u \equiv t - r_*$, $v \equiv t - r$ とする)
 Sch metric flat.

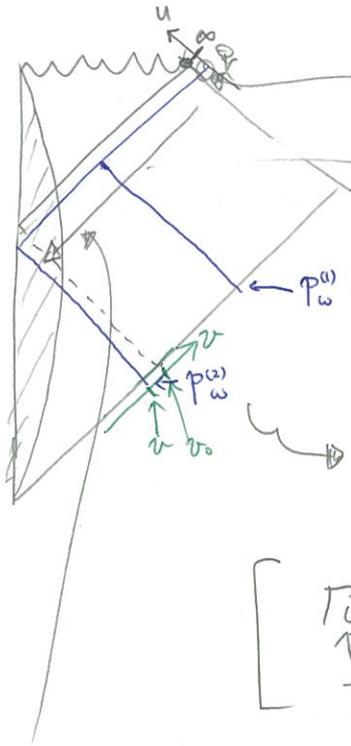
ところで Y_{lm} は直交性があるので、以下では各 (l, m) に対して行っているとして index を省く：

$$p_n = p_\omega, \quad f_n = f_\omega.$$

$$\therefore p_\omega = \int_0^\infty d\omega' [\alpha_{\omega\omega'} f_{\omega'} + \beta_{\omega\omega'} f_{\omega'}^*]$$

4. $\nabla^2 \phi = 0$ を解く

方針



逆走することと考える。

た、blue shift だ。

- $P_\omega^{(1)}$ ← これは、重力ホリゾンタルで散乱される
→ $\omega \rightarrow \omega'$ 変化しない → 存在しない。
- matter 内に入ると、戻ってくる
→ $\omega \rightarrow \omega'$ 変化する。

$$\left[\Gamma_\omega \delta(\omega - \omega') = (P_\omega^{(2)}, P_\omega^{(1)}) \quad (0 < \Gamma_\omega \leq 1) \right]$$

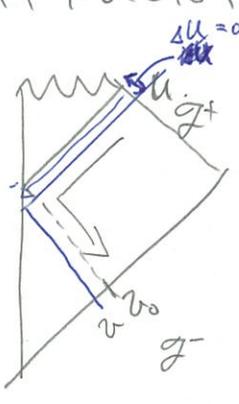
↑
一般に、 (ω, m, M) に依る。

このとき、大きく blue-shift する。 $\omega_{obs} = \frac{\omega}{\sqrt{1 - \frac{2M}{r}}}$ ↑

一方で、 $r > a$ の geometry は $dr \sim a$ でしか変化しない
⇒ 内部はほぼ flat だよ

⇒ Eikonal 近似としてよい ∴ この geodesic line 上で phase = const
⇒ $\frac{d}{d\lambda} S = l^\mu \nabla_\mu S = 0$

⇒ 求めることは、



$\Delta u = \text{affine dist}$ この長さを \mathcal{I}^- 上で平行移動させる

⇒ $u = u(v)$ を求める。

↑
"flat \mathcal{I}^- で $v \sim v_0$ に出た
内向き表か、matter を通って、
どの $u \sim \infty$ on \mathcal{I}^+ に達するの?"

⇒ $\beta_{\omega\omega'} = -(\mathcal{I}_\omega^*, P_\omega)$ と \mathcal{I}^- 上で積分する
 $\int dv$

5. $\beta_{\omega\omega}$ を求める.

$$\beta_{\omega\omega} = - (f_{\omega}^*, P_{\omega}^{(2)})$$

$$= (-i) \int_{\mathcal{H}^-} d\Sigma^{\mu} (f_{\omega}^* \nabla_{\mu} P_{\omega}^{(2)} - P_{\omega}^{(2)} \nabla_{\mu} f_{\omega}^*)$$

$$\nabla_{\mu} (f_{\omega}^* P_{\omega}^{(2)}) - P_{\omega}^{(2)} \nabla_{\mu} f_{\omega}^*$$

$$d\Sigma^{\mu} = r^2 d\Omega dv k^{\mu}$$

$$= -i 2 r^2 \int d\Omega \int_{-\infty}^{\infty} dv P_{\omega}^{(2)} \frac{\partial}{\partial v} f_{\omega}^*$$

$$= -2i r^2 \int_{-\infty}^{\infty} dv \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \frac{1}{r} e^{+i\omega u(v)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \frac{1}{r} (+i\omega) e^{+i\omega v}$$

$$= \sqrt{\frac{\omega}{3}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dv}{2\pi} e^{-i\omega u(v) + i\omega v}$$

$$= \sqrt{\frac{\omega}{\omega}} \int_{-\infty}^{v_0} \frac{dv}{2\pi} e^{+i\omega \log\left(\frac{v_0-v}{c}\right) + i\omega v} = e^{i\omega v_0} [\omega]^{-\frac{i\omega}{k}} e^{-i\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\omega} 2\pi} e^{\frac{\pi\omega}{2k}} \Gamma\left(1 - \frac{i\omega}{k}\right)$$

$$\alpha_{\omega\omega} = (f_{\omega}, P_{\omega}^{(2)})$$

$$= \sqrt{\frac{\omega}{\omega}} \int_{-\infty}^{v_0} \frac{dv}{2\pi} e^{+i\omega \log\left(\frac{v_0-v}{c}\right) + i\omega v}$$

$$\beta_{\omega\omega} = - e^{-2i\omega v_0 - \frac{\pi}{k}\omega} e^{i\omega v_0} \alpha_{\omega\omega}$$

$$\therefore |\beta_{\omega\omega}|^2 = e^{-\frac{2\pi\omega}{k}} |\alpha_{\omega\omega}|^2$$

$\therefore v_0 - v = x$ とおく.

$$\beta_{\omega\omega} = \sqrt{\frac{\omega}{\omega}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{2\pi} e^{-i\frac{\omega}{k} \log \frac{x}{c} + i\omega(v_0 - x)}$$

$$= \sqrt{\frac{\omega}{\omega}} e^{i\omega v_0} \int_0^{\infty} \frac{dx}{2\pi} \left(\frac{x}{c}\right)^{-i\frac{\omega}{k}} e^{-i\omega x}$$

$$\frac{1}{i\omega} \int_0^{\infty} \frac{dt}{2\pi} e^{-t} \left(\frac{t}{\omega c}\right)^{-i\frac{\omega}{k}} \quad i\omega x = t$$

$$= \sqrt{\frac{\omega}{\omega}} e^{i\omega v_0} \frac{1}{2\pi} (i\omega)^{-i\frac{\omega}{k}-1} \int_0^{\infty} dt e^{-t} t^{-i\frac{\omega}{k}} c^{-\frac{i\omega}{k}}$$

$$\omega^{-i\frac{\omega}{k}-1} (e^{\frac{\pi i}{2}})^{-i\frac{\omega}{k}-1} \Gamma\left(1 - \frac{i\omega}{k}\right) \quad -1 = -i\frac{\omega}{k} \quad \therefore \frac{\pi}{2} = 1 - i\frac{\omega}{k}$$

$$= \frac{1}{2\pi \omega \omega} e^{\frac{\pi\omega}{2k}} e^{i\omega v_0} \omega^{-i\frac{\omega}{k}} e^{-\frac{\pi}{2}i} \Gamma\left(1 - \frac{i\omega}{k}\right) \times c^{-\frac{i\omega}{k}}$$

$\phi, \langle 0 | b_{\omega}^{\dagger} b_{\omega} | 0 \rangle$

$\Gamma_{\omega} \delta(\omega - \omega') = (\Gamma_{\omega}^{(1)}, \Gamma_{\omega'}^{(2)})$

$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{dt}{2\pi} e^{-i(\omega - \omega')t} = \int_0^{\infty} d\omega' [\alpha_{\omega\omega'}^* \alpha_{\omega\omega'} - \beta_{\omega\omega'}^* \beta_{\omega\omega'}]$

$\omega = \omega' \Rightarrow \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T}{2\pi} \Gamma_{\omega} = \int_0^{\infty} d\omega' [|\alpha_{\omega\omega'}|^2 - |\beta_{\omega\omega'}|^2]$
 $= (e^{\frac{2\pi\omega}{k}} - 1) \int_0^{\infty} d\omega' |\beta_{\omega\omega'}|^2$

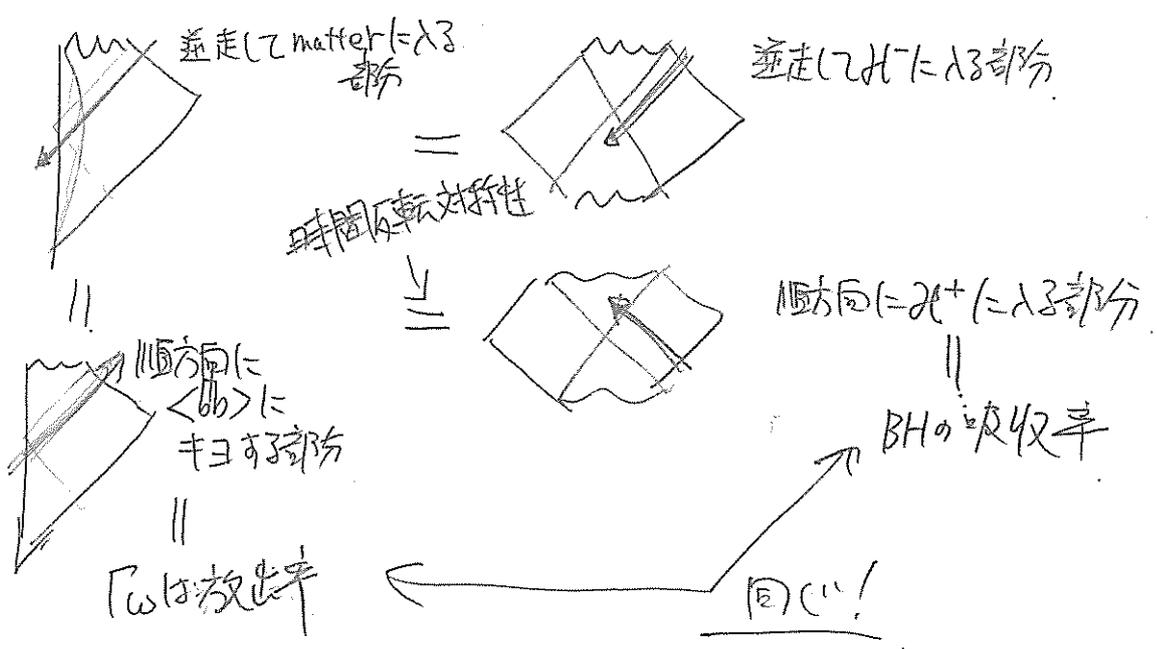
$\therefore \int_0^{\infty} d\omega' |\beta_{\omega\omega'}|^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T}{2\pi} \frac{\Gamma_{\omega}}{e^{\frac{2\pi\omega}{k}} - 1}$

各 ω に対し、有限定常 flux である for $\delta t = \infty$, on \mathcal{H}^- .

\Rightarrow 波束を用いれば有限にできる!

$\langle 0 | b_{\omega}^{\dagger} b_{\omega} | 0 \rangle = \frac{\Gamma_{\omega}}{e^{\frac{h\omega}{k}} - 1}, \quad T_H \equiv \frac{h k}{2\pi c} = \frac{h}{8\pi G M}$

- Γ_{ω} の入



よって、 Γ_{ω} は 温度 T_H の gray-body factor と 対応せよ
 \Rightarrow 遠くの方は、温度 T_H , Γ_{ω} をもつ gray-body のおまけに BH をみる!!

7. いくつかの注意点

(a). 粒子生成は遠くのカオスの真空場から来た。
collapsing matter からではない。

(b). このキロンは、BHの外だけを使っている。

(c). このキロンは、重力崩壊の詳細に依らない。
(\hookrightarrow 結果は M だけに依存)

(d). T_H はフリーの温度ではない。pure state である!

(e). エントロピーは面積に比例。

$$M = U \quad , \quad T(U) = \frac{\hbar}{8\pi G U}$$

$$\Rightarrow \int_{\text{熱吸収}} \frac{dQ}{T} \stackrel{\uparrow}{=} \int \frac{dU}{T(U)} = \frac{A}{4l_p^2} //$$

とく。

(h). Stefan-Boltzmann 則を使うと。 (しかし、 $\textcircled{\text{BH}}$ $\int_a \sim \leftarrow a$ で使いなさい!...)

$$J = \sigma A_{\text{BH}} T^4 \sim \sigma a^2 \left(\frac{\hbar}{a}\right)^4 \propto \frac{1}{a^2} //$$

$$\Rightarrow \frac{da}{dt} = -k \frac{1}{a^2}$$

$$\Rightarrow \tau_{\text{life}} \sim \frac{a^3}{l_p^2 c} \text{ 2" BH は蒸発する。}$$

$$\sim 10^{26} \times 10^3 \times 10^{-8} = 10^{21} \text{ sec.}$$

Hawkingの考えたこと



event
horizon

τ

- 時間変化する重力崩壊中の時空上で、真空状態の量子場の時間発展を解いた
⇒ 遠くの観測者は粒子生成をみる

BH領域

BH時空

← 崩壊物質
= 外場としてエネルギー注入

平坦時空

崩壊物質

Minkowski真空: $|0\rangle_M$

r

$r = a$

情報喪失問題

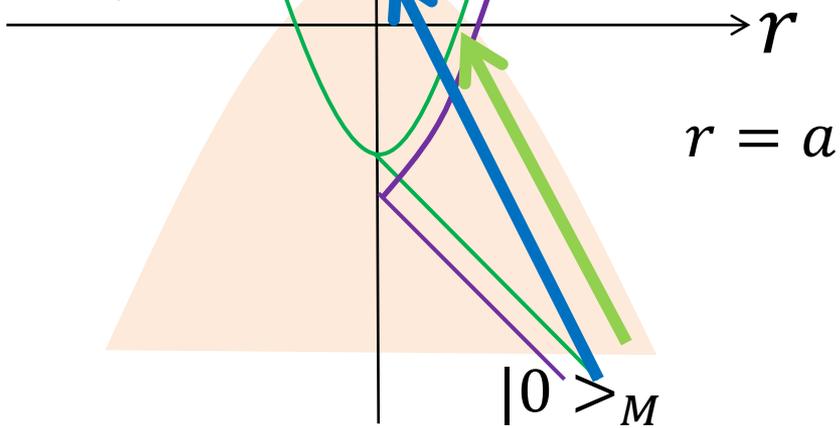
τ

崩壊物質としての星のエネルギー
⇒BHのエネルギーになる
⇒輻射のエネルギーとして戻ってくる

しかし
輻射自体は真空 $|0\rangle_M$ から出発したので、
星の情報は持たないように見える

• 情報の流れ ≠ エネルギーの流れ
⇒ 情報喪失

特異点に入った
星の情報はどうなる?



$r = a$

$|0\rangle_M$