目次

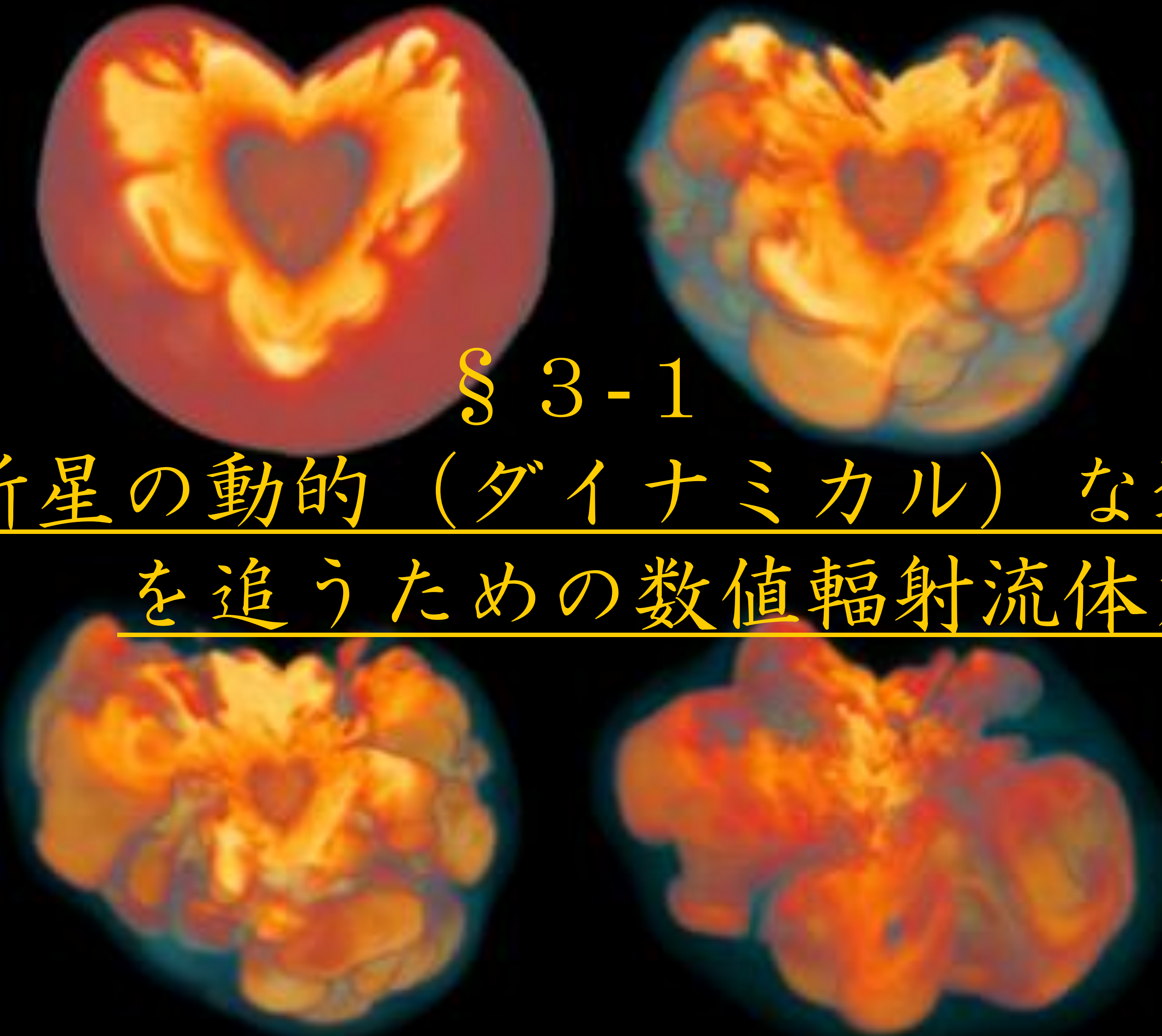
今日の前半部のお題

§ 3-2　ニュートリノ輻射＋流体計算法

流体計算（数値流体解法）

ニュートリノ輻射輸送計算

§ 3-3　ガンマ線バーストの中心駆動源



§3-1
超新星の動的（ダイナミカル）な進化を追うための数値輻射流体力学

内容

- 流体力学基礎方程式の導出（done）
- ランキン・ユゴニオ(Rankine-Hugoniot)関係
- Riemann 問題
- ニュートリノ輻射輸送

流体力学基礎方程式のまとめ

未知数

1本 質量保存

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\rho\mathbf{v} = 0$$

運動量の式

3
$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial \pi_{ij}}{\partial x_j} = \rho g_i$$

$$\pi_{ij} = \rho v_i v_j + \delta_{ij} p$$

エネルギーの式

1
$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \mathrm{div}\left[(\rho e + p)\,\vec{v}\right] = -\rho \vec{v}\ \mathrm{grad}\ \Phi$$

1 状態方程式 $p(\rho)$ Polytropic
ポリトロープ状態方程式

1 ポアソン方程式 $\Delta\Phi = 4\pi G\rho$

ρ 1 $\mathbf{v}$ 3

p 1 g_i 1

e 1 Φ 1

1

$g_i = -\nabla_i \Phi$

方程式の数と未知数の数が同じで方程式系が閉じている。

「方程式の数と未知数の数が同じで方程式系が閉じている」
⇒初期条件を与えれば、
その後の時間発展が(原理的には)分かるはず。

☆ただ方程式が非線形で、複雑。
解析解はごく限られた問題でしか得られない。

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial \pi_{i\,j}}{\partial x_j} = \rho g_i \qquad \pi_{i\,j} = \rho v_i v_j + \delta_{i\,j} p$$

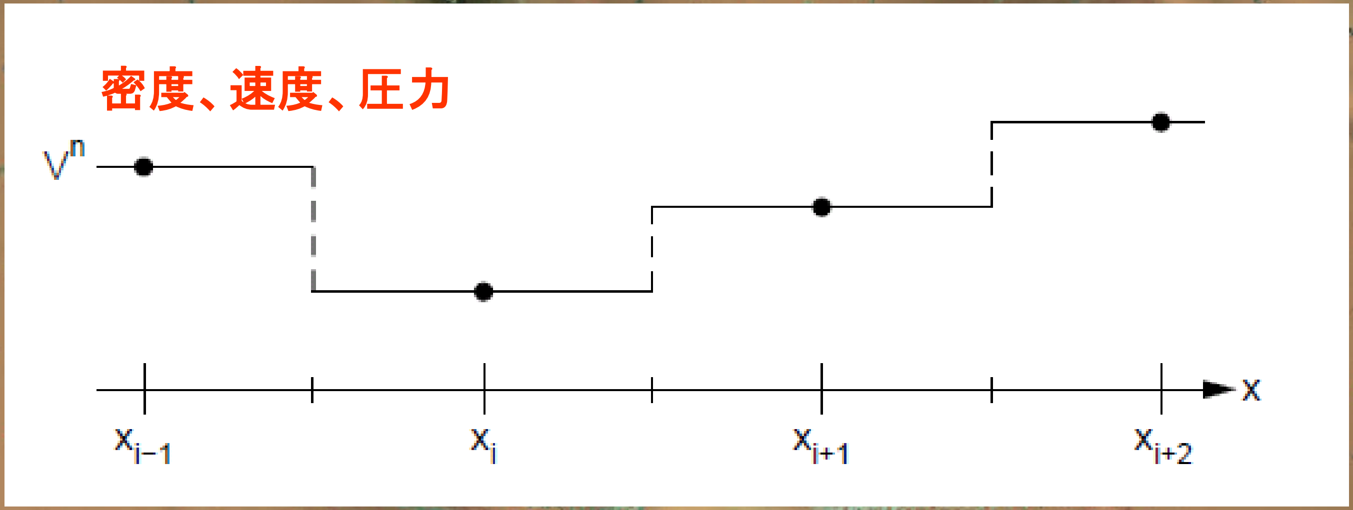
したがって、
流体の運動を追うためには、数値計算が不可欠。
☆更に偏微分方程式を数値的に解かなくてはならない。

いかに精度良く、数値的に流体の時間発展を追うか？
数値流体力学(Computational Fluid Dynamics:CFD)

内容

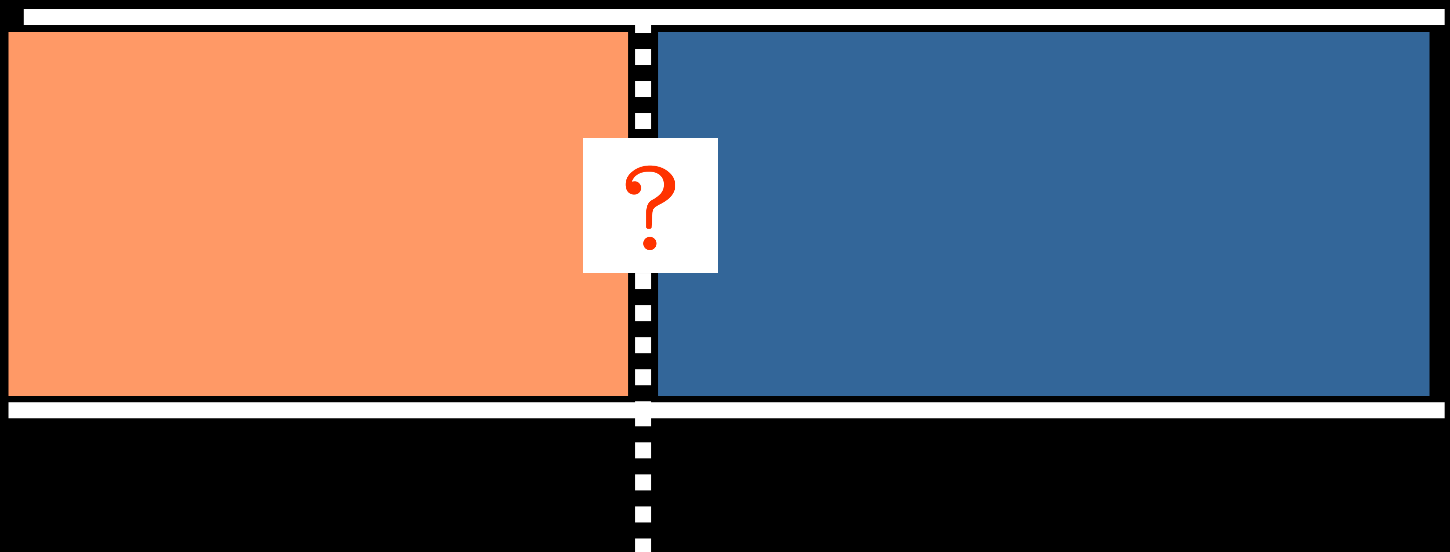
- 流体力学基礎方程式の導出
- Riemann問題に向けて
  ☆Rankine Hugoniot関係導出
  ☆具体例：Strong shock

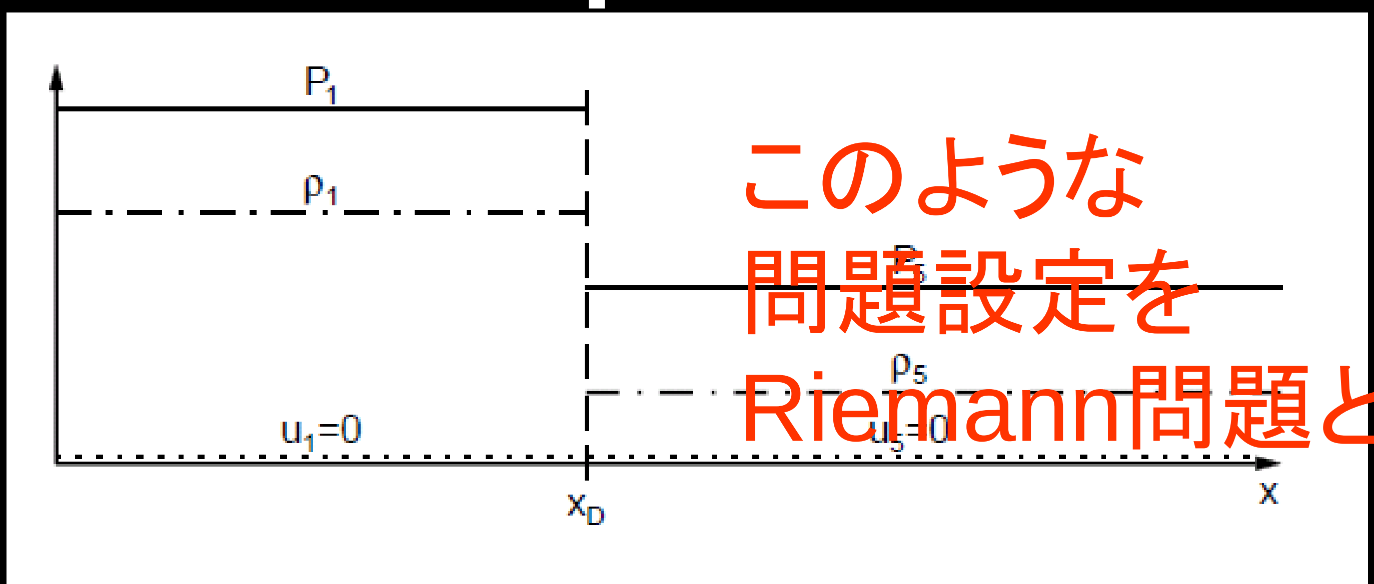
３次元シミュレーション例



ある瞬間、各点各点で密度、圧力、速度が不連続に与えられたとき、その後の各物理量の時間発展を数値的に追うこと、これがCFDのココロ。

もっと単純化すると、二つの状態の異なる
ガスをいれた容器のふたを取ったとき、その後の
ガスのダイナミクスが分かれば良い。





このような
問題設定を
Riemann問題と呼ぶ。

Riemann問題を解くための準備(1)

一次元保存系の流体方程式

$$
\begin{aligned}
\rho_t + (\rho u)_x &= 0 \\
(\rho u)_t + (\rho u^2 + p)_x &= 0 \\
(\rho E)_t + [(\rho E + p)u]_x &= 0
\end{aligned}
$$

コンパクトに以下のように書く。

$$
\mathbf{U}_t + \mathbf{F}(\mathbf{U})_x = 0
$$

$$
\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho E \end{pmatrix} \quad \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ (\rho E + p)u \end{pmatrix}
$$

Riemann問題を解くための準備(1)

$$\mathbf{U}_t + \mathbf{F}(\mathbf{U})_x = 0$$
に対して、

$$\mathbf{G} \equiv (\mathbf{F}(\mathbf{U}), \mathbf{U})$$

$$\mathrm{Div}(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2) \equiv (\mathbf{F}_1)_x + (\mathbf{F}_2)_t$$

を定義すると、

$$\boxed{\mathrm{Div}\mathbf{G} = 0}$$
と書ける。

任意の関数Φにたいして以下の関係が成り立つ。

$$\int \Phi\, \mathrm{Div}\mathbf{G}\, dx dt = 0$$

部分積分して以下の関係が得られる。(無限遠でGはゼロ)

$$\int \mathrm{grad}\Phi \cdot \mathbf{G}\, dx dt = 0$$

$$\int_{\Omega} \mathrm{grad}\Phi \cdot \mathbf{G}\, dxdt = 0$$

領域Ωを二つの領域に分けて考える。

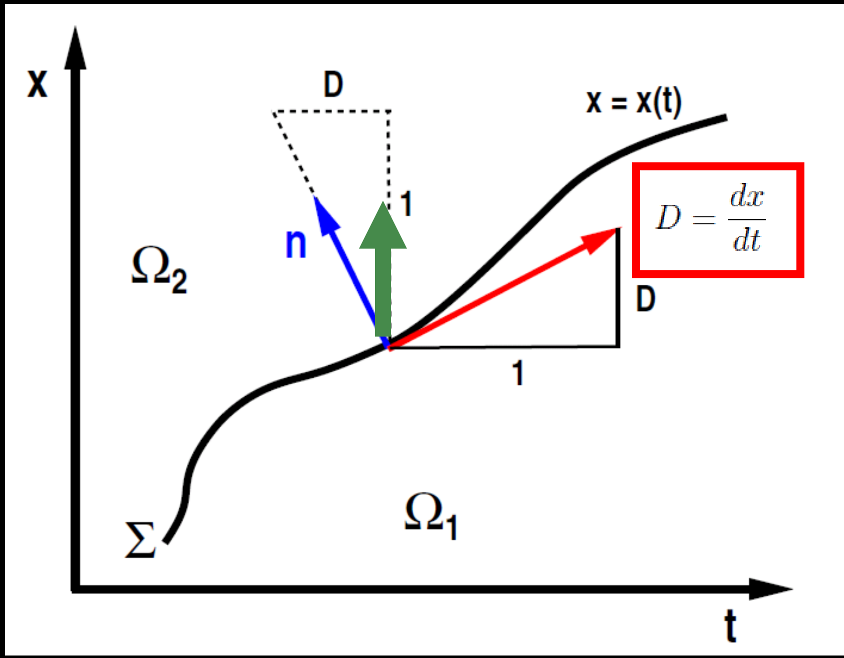
$$\int_{\Omega_1} \mathrm{grad}\Phi \cdot \mathbf{G}\, dxdt + \int_{\Omega_2} \mathrm{grad}\Phi \cdot \mathbf{G}\, dxdt = 0$$

部分積分する。

$$\mathrm{DivG} = 0$$

$$\int_{\Omega_1} \mathrm{Div}(\Phi\mathbf{G})\, dxdt - \cancel{\int_{\Omega_1} \Phi\, \mathrm{DivG}\, dxdt}$$

$$+ \int_{\Omega_2} \mathrm{Div}(\Phi\mathbf{G})\, dxdt - \cancel{\int_{\Omega_2} \Phi\, \mathrm{DivG}\, dxdt} = 0$$



$$[\mathbf{G} \cdot \mathbf{n}] \equiv \mathbf{G}_1 \cdot \mathbf{n} - \mathbf{G}_2 \cdot \mathbf{n} = 0$$

グリーンの法則より、面積分に変換。

$$\int_{\Sigma} \Phi\, \mathbf{G}_1 \cdot \mathbf{n}\, d\sigma - \int_{\Sigma} \Phi\, \mathbf{G}_2 \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = 0$$

$$\boxed{D = \frac{dx}{dt}}$$

不連続面の速度を用いて

不連続面の法線方向のベクトルは

$$\int_{\Sigma} \Phi\, (\mathbf{G}_1 - \mathbf{G}_2) \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = 0$$

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{D^2+1}}\mathbf{e}_x - \frac{D}{\sqrt{D^2+1}}\mathbf{e}_t$$

と書ける

$\mathbf{G} \equiv (\mathbf{F}(\mathbf{U}), \mathbf{U})$ を思い出すと、nと内積を取って

$$-D[\mathbf{U}] + [\mathbf{F}(\mathbf{U})] = 0$$

$$\begin{aligned} D[\rho] &= [\rho u] \\ D[\rho u] &= [\rho u^2 + p] \\ D[\rho E] &= [(\rho E + p)u] \end{aligned}$$

$$\boxed{[\mathbf{G} \cdot \mathbf{n}] \equiv \mathbf{G}_1 \cdot \mathbf{n} - \mathbf{G}_2 \cdot \mathbf{n} = 0}$$

$\boxed{D = 0}$（衝撃波静止系）では以下の関係が成り立つ、

$$\begin{aligned} \rho_1 u_1 &= \rho_2 u_2 \boxed{= M} \\ \rho_1 u_1^2 + p_1 &= \rho_2 u_2^2 + p_2 \\ u_1(\rho_1 E_1 + p_1) &= u_2(\rho_2 E_2 + p_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho_1 u_1 &= \rho_2 u_2 \\ \rho_1 u_1^2 + p_1 &= \rho_2 u_2^2 + p_2 \\ u_1(\rho_1 E_1 + p_1) &= u_2(\rho_2 E_2 + p_2) \end{aligned}$$

$$E = u^2/2 + \varepsilon$$

衝撃波

Rankine-Hugoniot関係と呼ぶ。

3番目のエネルギーの式から

$$\frac{u_1^2}{2} + \varepsilon_1 + \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{u_2^2}{2} + \varepsilon_2 + \frac{p_2}{\rho_2}$$

移項して、

$$\boxed{\frac{1}{2}\underline{(u_1 - u_2)}\underline{(u_1 + u_2)} + \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2} = 0}$$

1番目の質量保存の式からMを使って、
2番目に代入すると

$$M = -\frac{p_1 - p_2}{\underline{u_1 - u_2}}$$

1番目の質量保存の式から、比体積を定義して

$$\tau \equiv 1/\rho$$

$$\underline{u_i = M\tau_i} \quad , \quad i = 1, 2$$

二番目の流束保存に代入すると、

$$M^2 = -\frac{p_1 - p_2}{\tau_1 - \tau_2}$$

$$-\frac{p_1 - p_2}{2M}(M\tau_1 + M\tau_2) + \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + p_1\tau_1 - p_2\tau_2 = 0$$

$$\boxed{\frac{p_1 + p_2}{2}(\tau_1 - \tau_2) + \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = 0}$$

この曲線を衝撃波断熱曲線、
Rankine-Hugoniot断熱曲線
と呼ぶ。

内部エネルギーは状態方程式を用いて、

$$\varepsilon = \varepsilon(\underline{p}, \underline{\tau})$$

（ここでは圧力、密度依存とする）

Hugoniot曲線は二つのパラメーターで書ける。

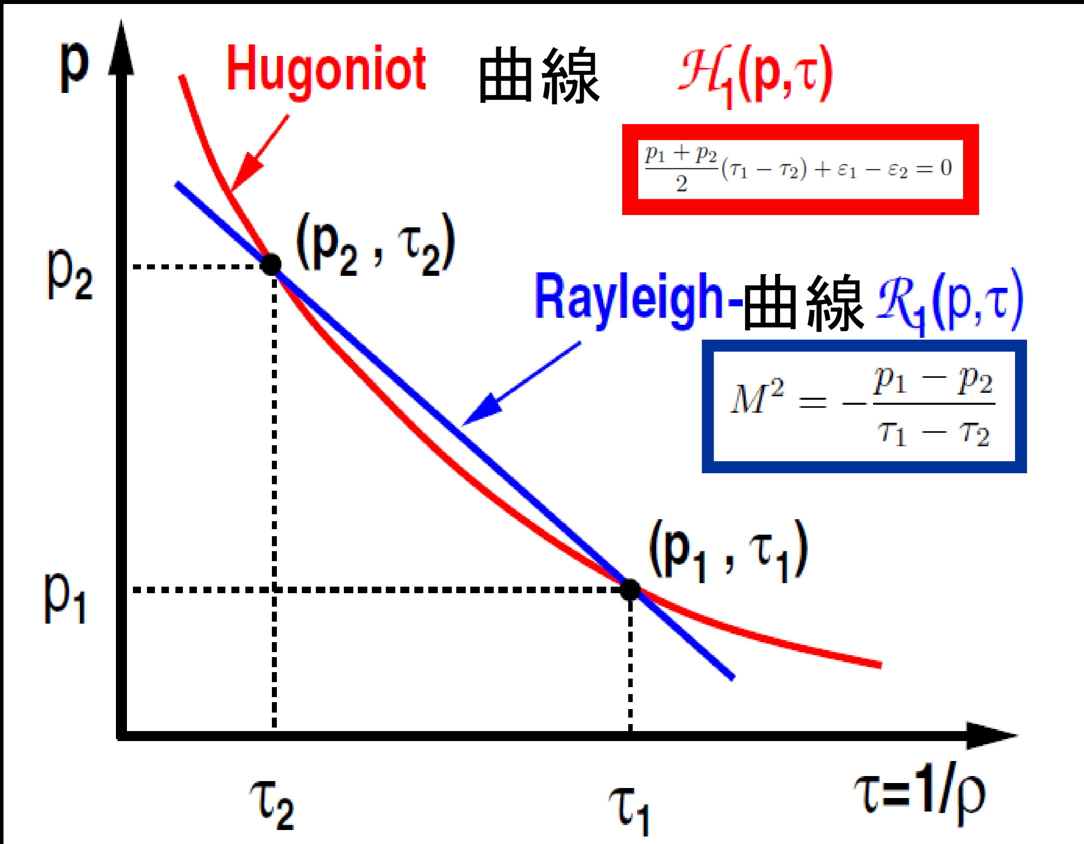
$$\mathcal{H}_1(p, \tau) \equiv \varepsilon(p, \tau) - \varepsilon(p_1, \tau_1) + \frac{p + p_1}{2}(\tau - \tau_1)$$

Hugoniot 曲線から読み取れる重要な性質

（1）初期の状態が分かっているとき、

(p_1, τ_1)

衝撃波背面の物理量
はただ一つのパラメータ
により指定される。
例えば、p2が与えられると、
τ2は断熱曲線より与えられ、
そうすると、Mがわかり、
そうすると、u1,u2も分かる。



（2） (p_1, τ_1) と (p_2, τ_2) を
結ぶ直線（Rayleigh直線）の傾き

$$M^2 = -\frac{p_1-p_2}{\tau_1-\tau_2}$$

が、流束Mを与える。

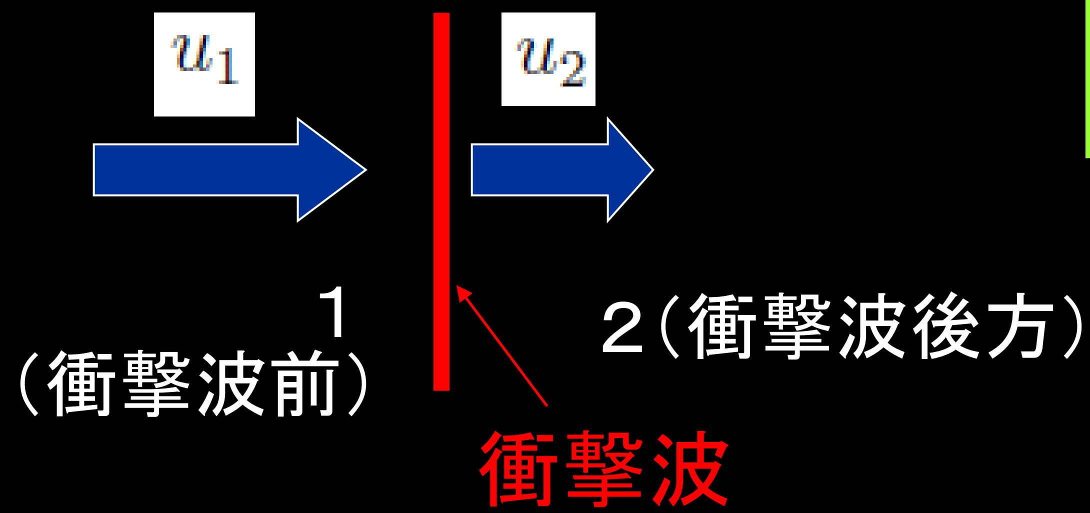
☆Question!
初期の状態から、Hugoniot曲線に載っている点だったら、どんな点にでも状態が遷移することが可能か？ NO!

エントロピーは以下のように書ける。

$$s_2 - s_1 = \frac{1}{12T_1}\left(\frac{\partial^2 \tau}{\partial p_1^2}\right)_s (p_2 - p_1)^3$$

$$\left(\frac{\partial^2 \tau}{\partial p^2}\right)_s > 0$$

衝撃波通過後は
エントロピーが増加すべし。



だから、$\boxed{p_2 > p_1}$

$$M^2 = -\frac{p_1 - p_2}{\tau_1 - \tau_2}$$

$M^2 > 0$より、$\tau_1 > \tau_2$，密度は

衝撃波背面で上がるべき。

$\tau \equiv 1/\rho$ だったので、

さらに

$$u_i = M\tau_i \quad , \quad i = 1, 2$$

より、

$$u_1 > u_2$$

であることが分かる。

内容

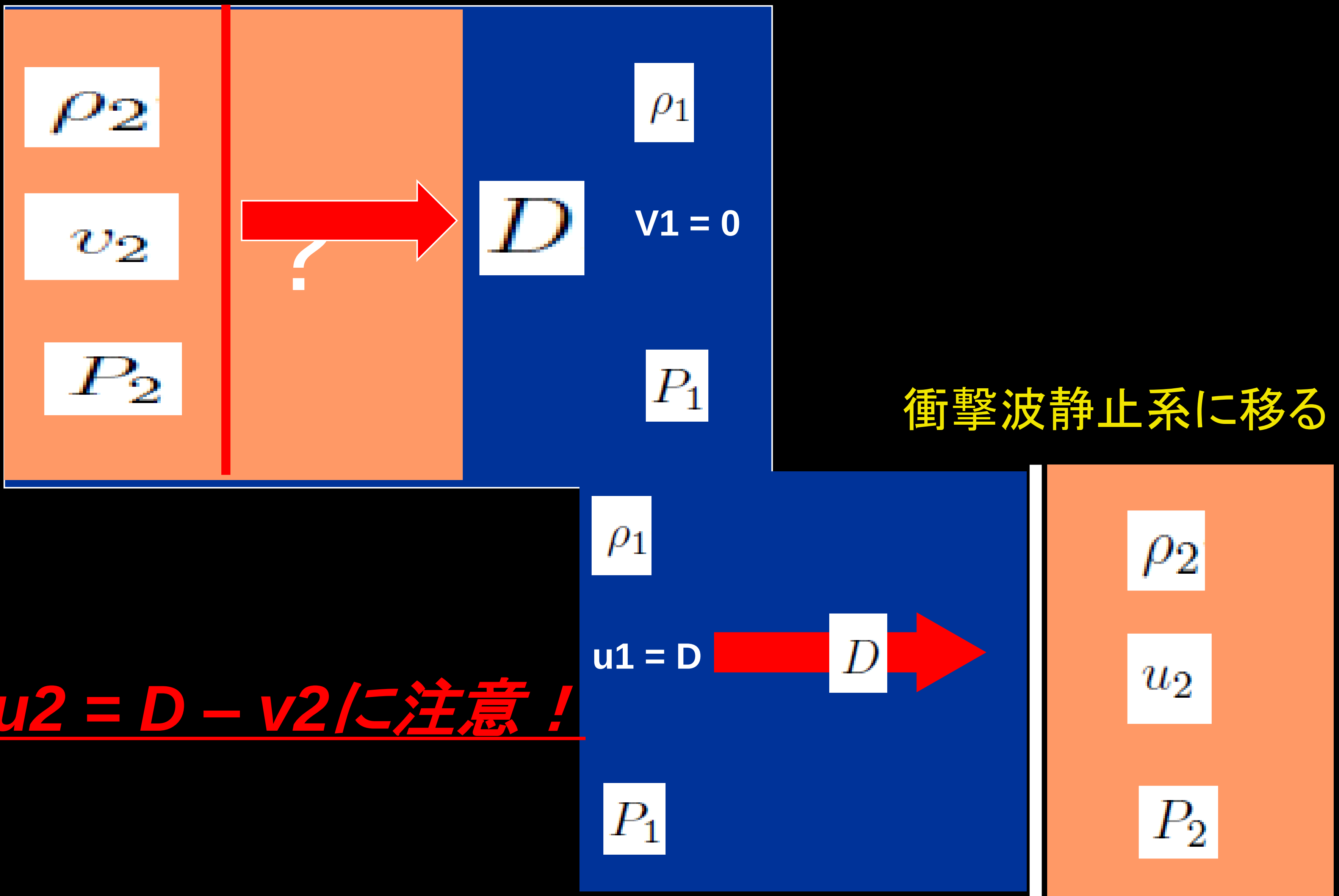
- 流体力学基礎方程式の導出
- Riemann問題に向けて

  ☆Rankine Hugoniot関係の導出

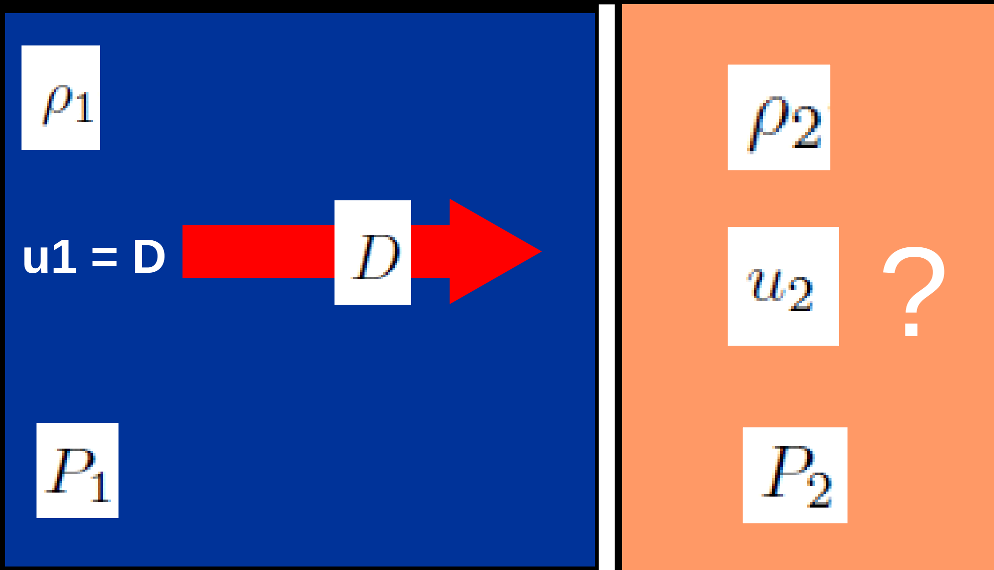
  ☆具体例：Strong shock

Strong shock(強い衝撃波）の場合

今、ρ_1 P_1 で静止（V1 = 0）しているガスに、速度Dで衝撃波が飛び込んできたとする。この場合衝撃波背面の物理量を求めたい。



u2 = D – v2に注意！



u2 = D – v2に注意！

RH関係の3つの式は以下と同値。

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma+1)\cancel{M_{a_1}^2}}{(\gamma-1)\cancel{M_{a_1}^2} \cancel{+2}}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma M_{a_1}^2}{\gamma+1} \cancel{- \frac{\gamma-1}{\gamma+1}}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{[2\gamma M_{a_1}^2 - (\gamma-1)][(\gamma-1)M_{a_1}^2 + 2]}{(\gamma+1)^2 M_{a_1}^2}$$

☆この式の導出
宇宙流体力学（坂下志郎、池内了）
など参照

$M_a \equiv u/\boxed{c}$ → 音速

マッハ数
＞1　超音速（supersonic)
＜1　亜音速(subsonic)

今、強い衝撃波の場合を考える。

$$M_{a_1} >> 1$$

$$\boxed{\rho_2 = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}\,\rho_1}$$

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2$$

$$u_1 = D$$

$$u_2 = \rho_1 u_1/\rho_2 = \frac{\gamma-1}{\gamma+1}D$$

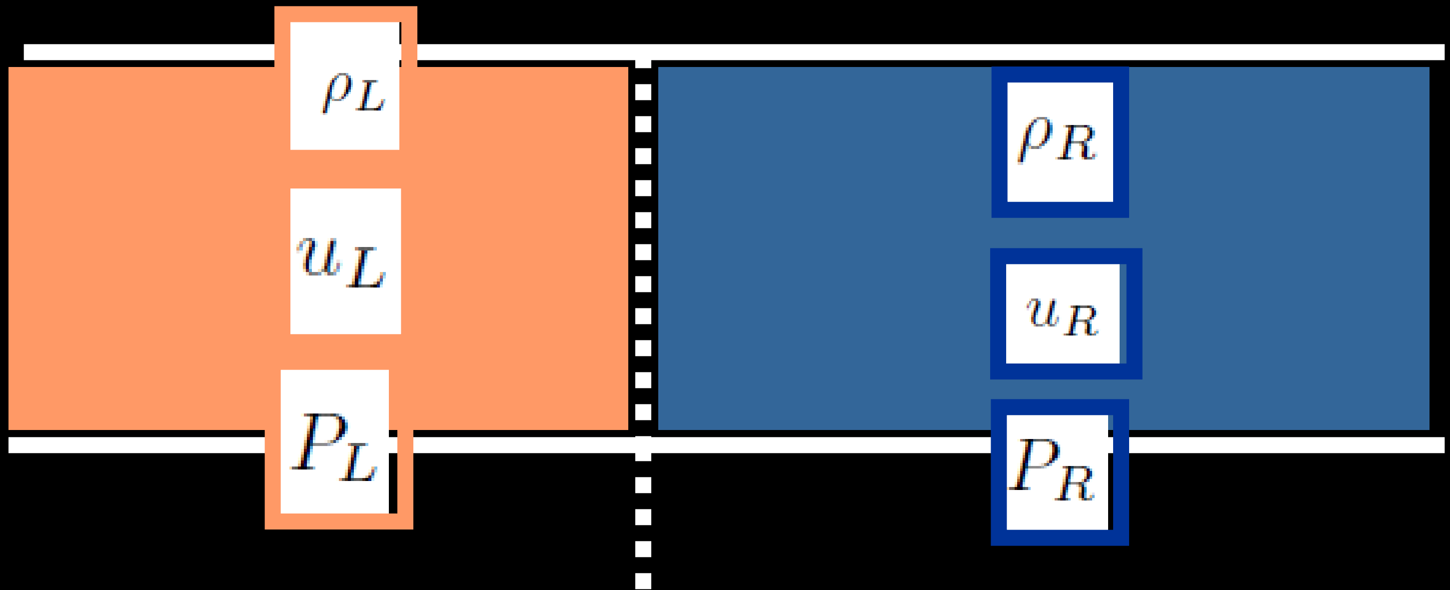
$$\boxed{v_2 = D - u_2 = \frac{2}{\gamma+1}D}$$

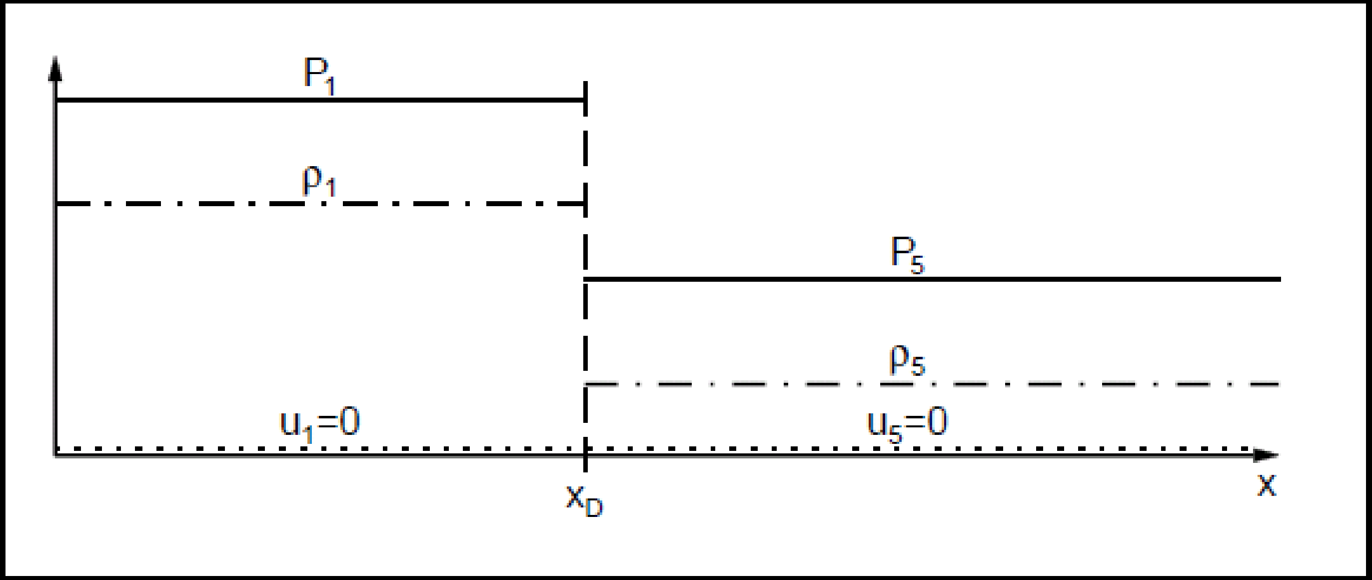
V2は実験室系、u2は衝撃波静止系の量であることに注意！！！

$$\boxed{P_2 = \frac{2\gamma}{\gamma+1}P_1\frac{u_1^2}{c^2} = \frac{2\gamma}{\gamma+1}P_1\frac{D^2}{c^2}}$$

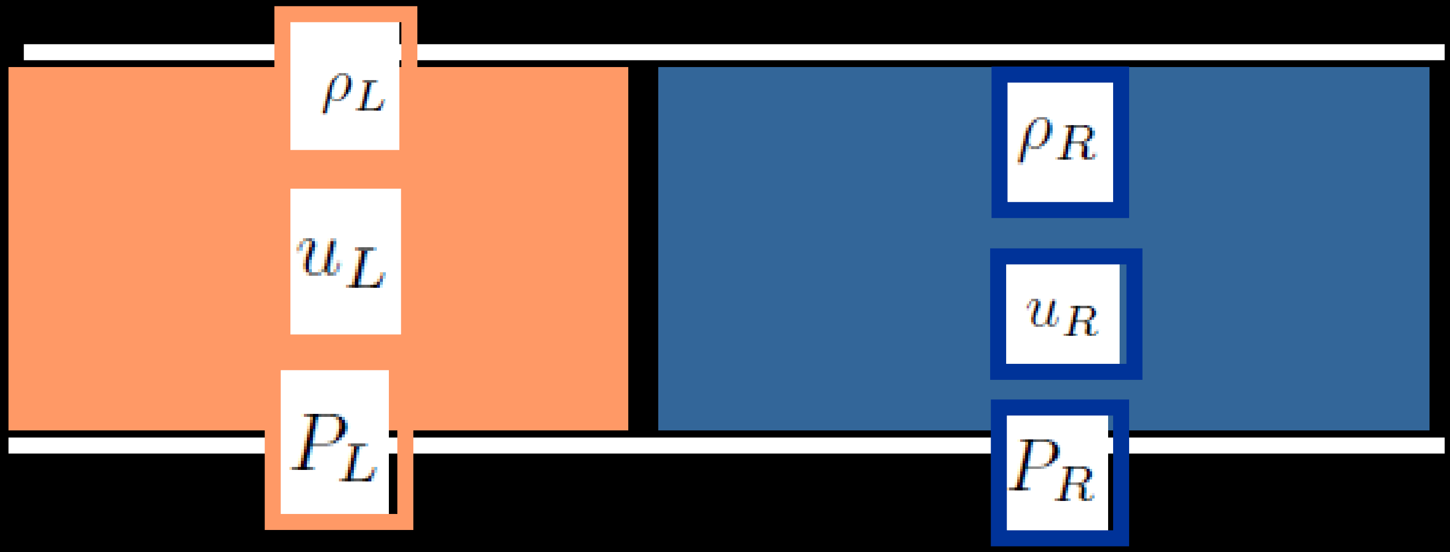
衝撃波背面の量が、衝撃波前面の量と衝撃波の速度で表せた。
（強い衝撃波問題が解けた）

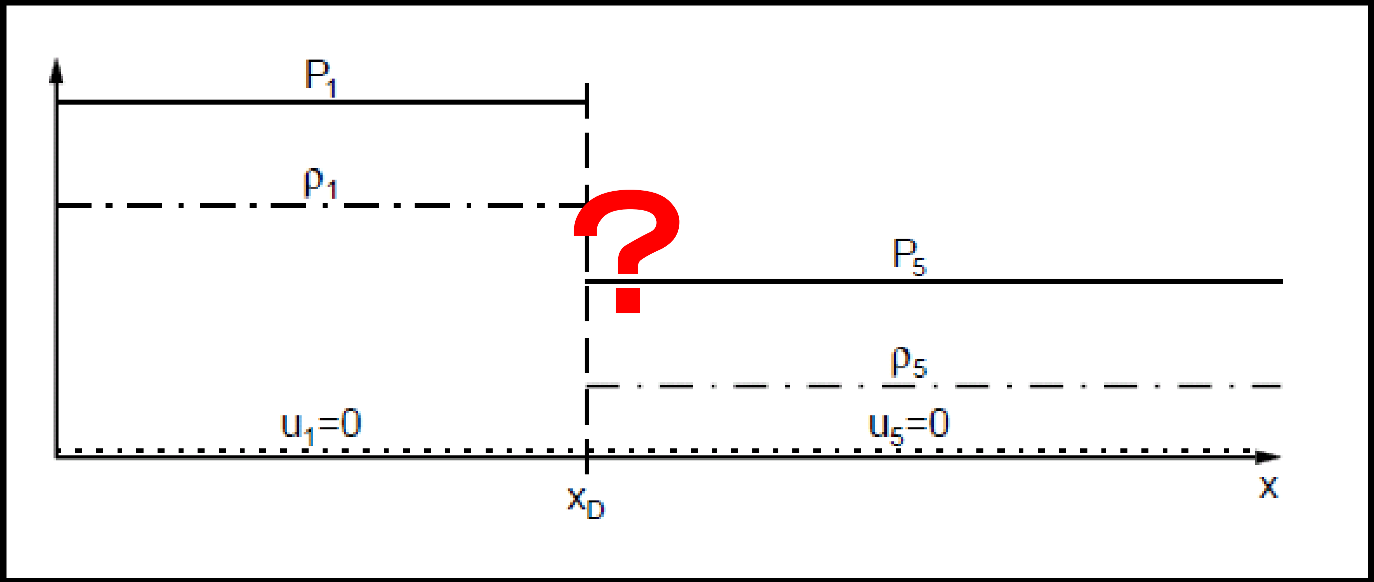
Riemann問題





Riemann問題



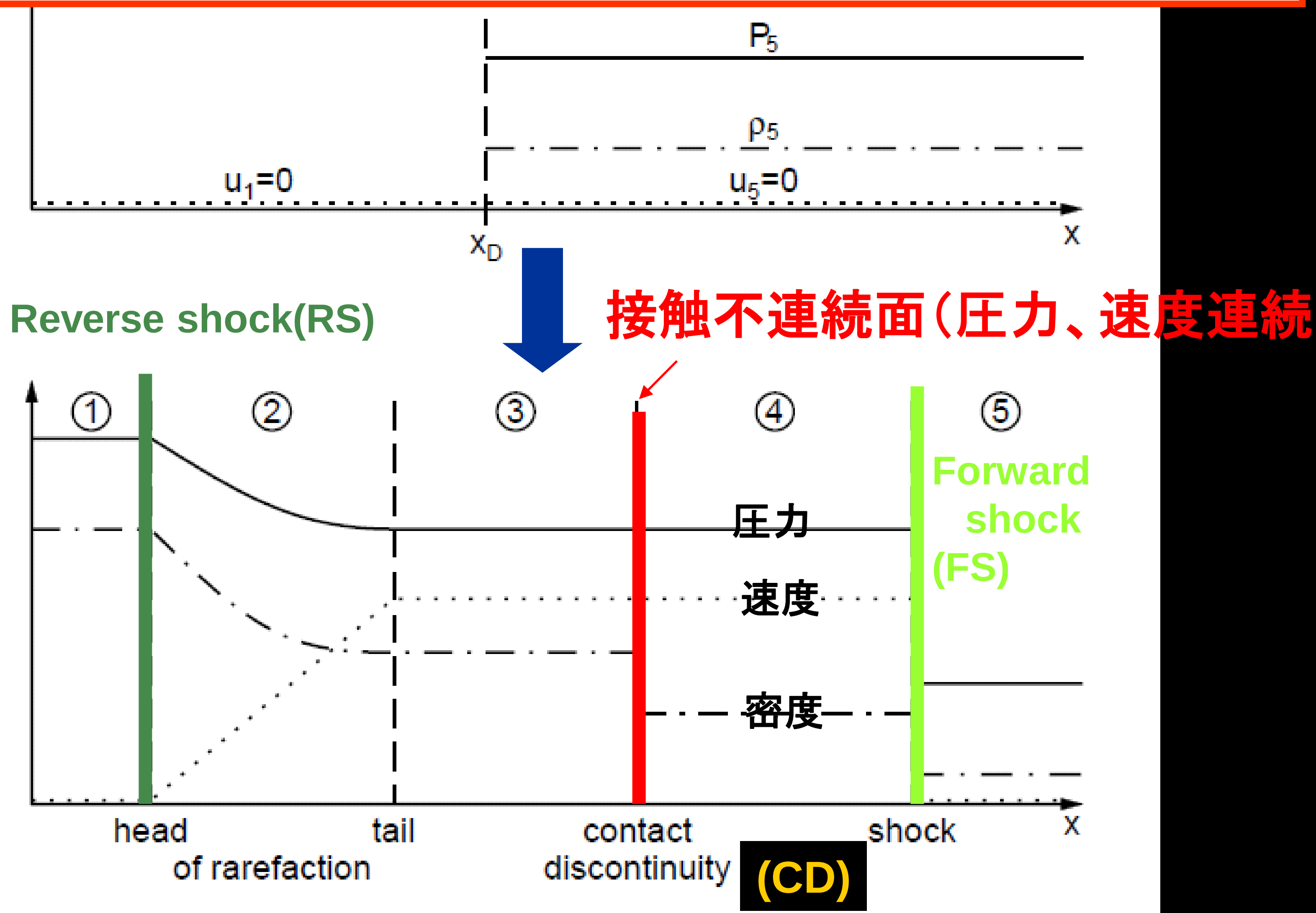


未知数勘定
CD
左右の
密度(2)、
速度、
圧力、
RSの速度
CDの速度、
FSの速度
(7未知数)
⇔
RH
7本
(内訳
RS:3
FS:3
CD:1)

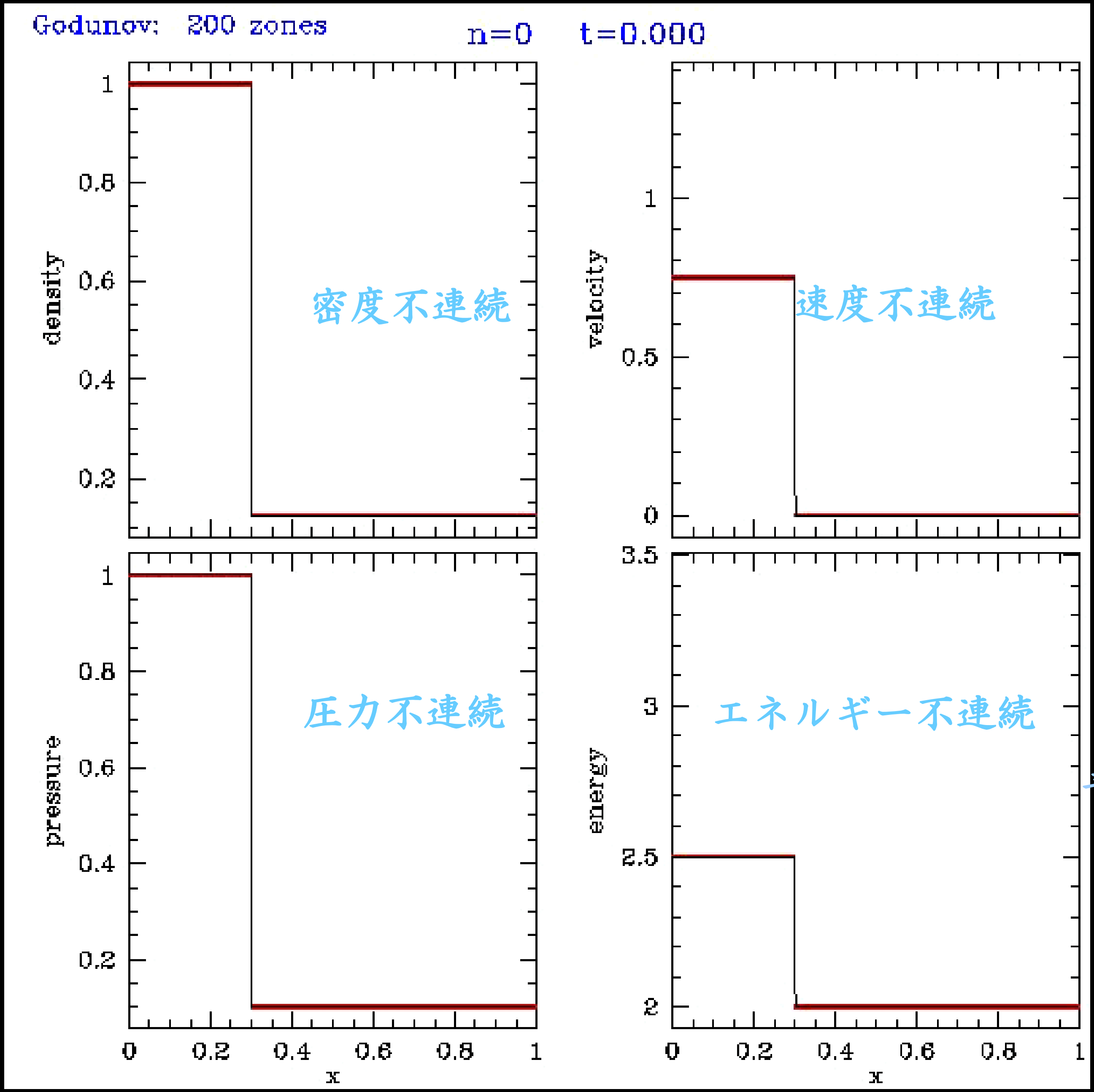
Riemann Problem:

HIRSCH, C., "Numerical Computation of Internal and External Flows (Vol.2: Computational Methods for Inviscid and Viscous Flows)", *A Wiley-Interscience Publication* (1992).

ランダウ, リフシッツ, "流体力学 2", 東京図書, 1971.

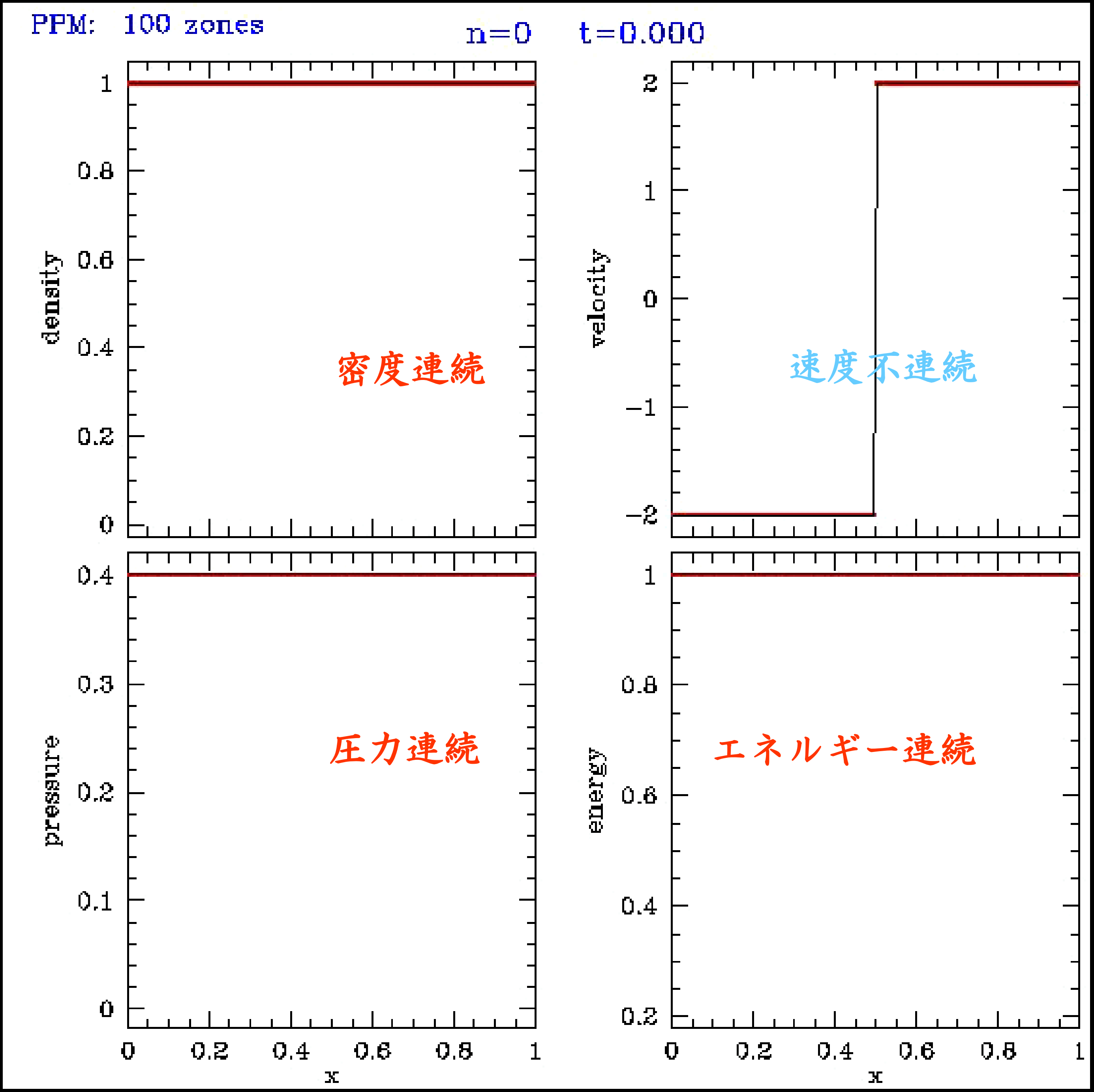


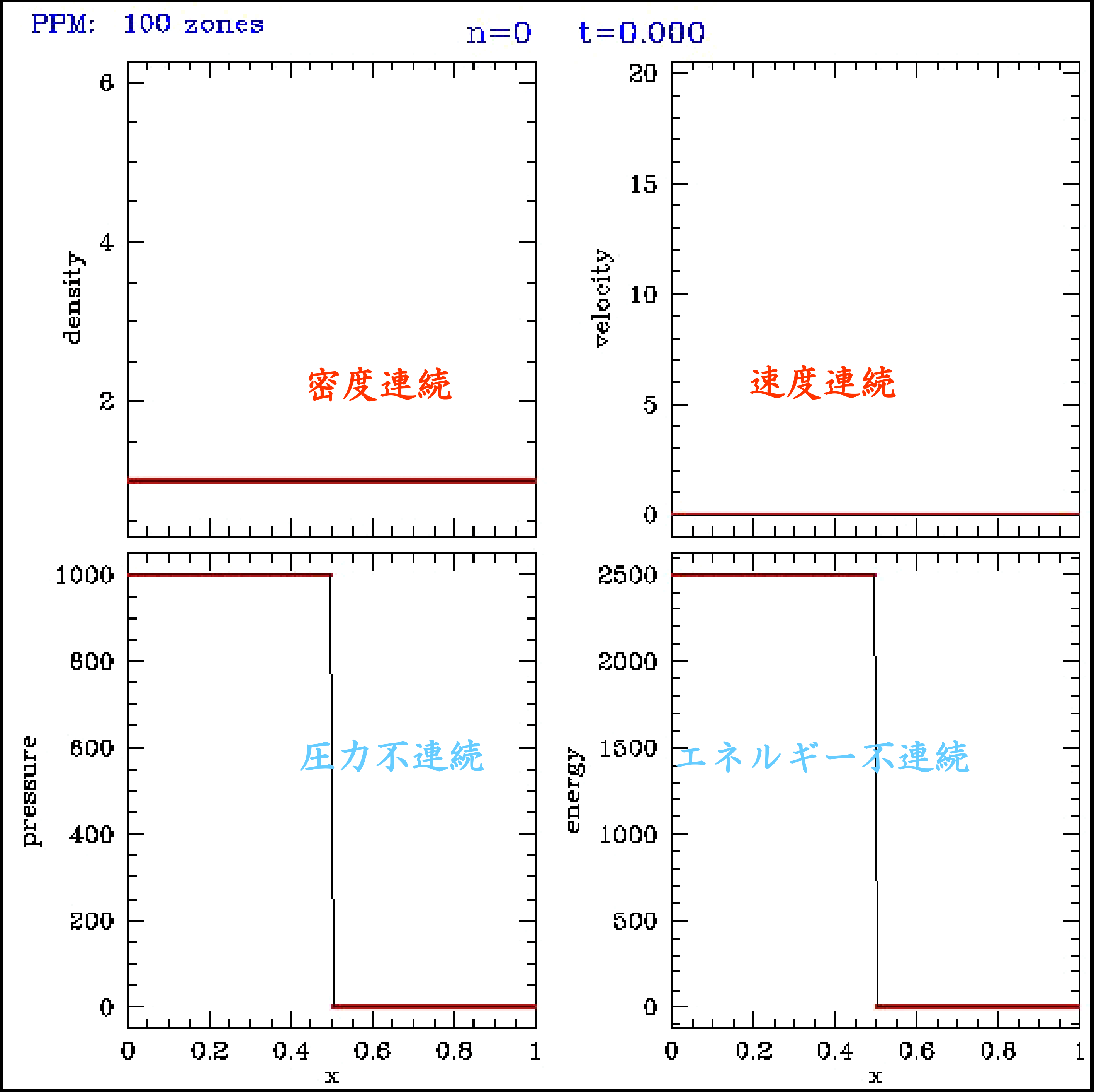
初期条件によって解の構造が異なる：Shock tube テスト



もっとも一般的な場合

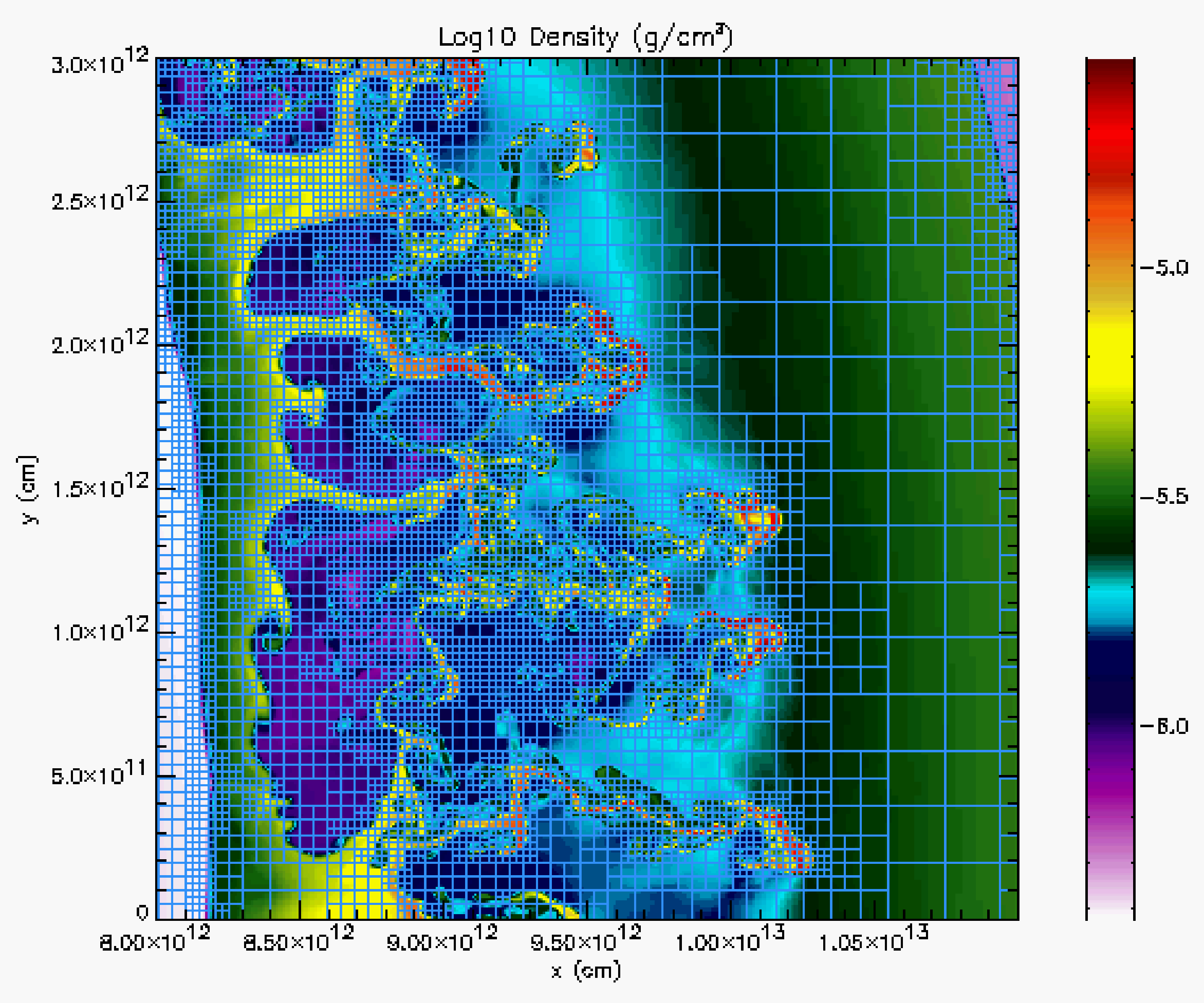
青線：解析解


PPM: 100 zones
n=0
t=0.000
density
velocity
pressure
energy
x
x
密度連続
速度不連続
圧力連続
エネルギー連続



PPM: 100 zones
n=0 t=0.000
density
密度連続
velocity
速度連続
pressure
圧力不連続
energy
エネルギー不連続
x
x

Adaptive mesh refinement 法(適合格子法）の一例（Kifonidius et al. 2003 A&A)



$$\mathbf{U}_t + \mathbf{F}(\mathbf{U})_x = 0$$

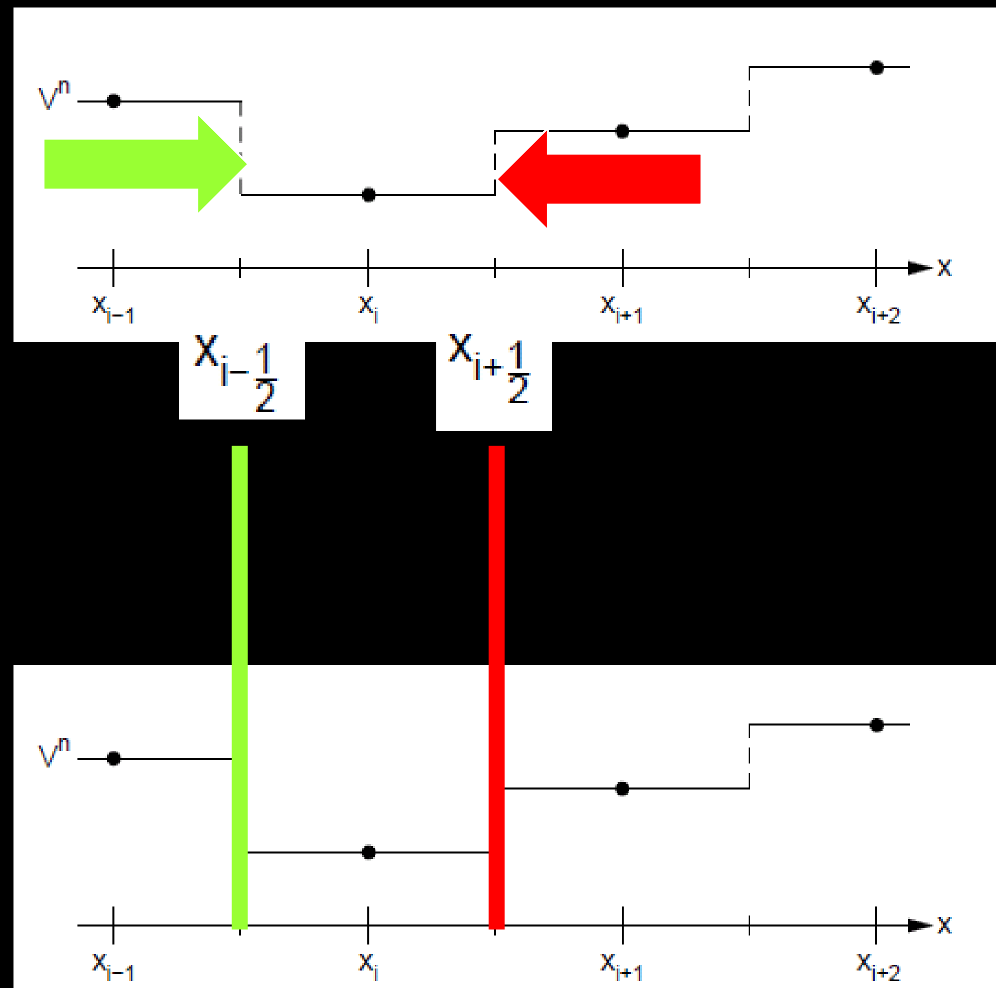
$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho E \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ (\rho E + p)u \end{pmatrix}$$

差分の式にする。

$$\frac{\mathbf{U}_i^{n+1} - \mathbf{U}_i^n}{\Delta t} = -\frac{\boxed{\mathbf{F}^n_{i-1/2}} - \boxed{\mathbf{F}^n_{i+1/2}}}{\Delta x}$$

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\boxed{\mathbf{F}_{x_{i-1/2}}} - \boxed{\mathbf{F}_{i+1/2}}\right)$$



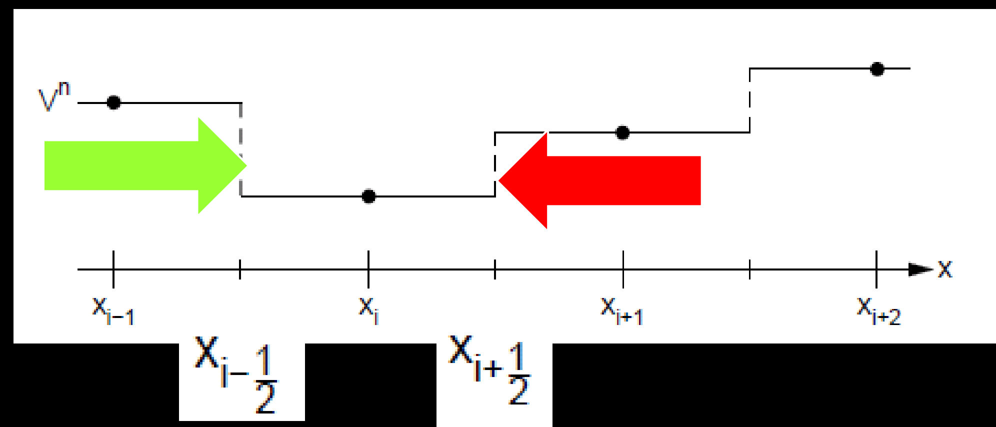
$$\mathbf{U}_t + \mathbf{F}(\mathbf{U})_x = 0$$

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho E \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ (\rho E + p)u \end{pmatrix}$$

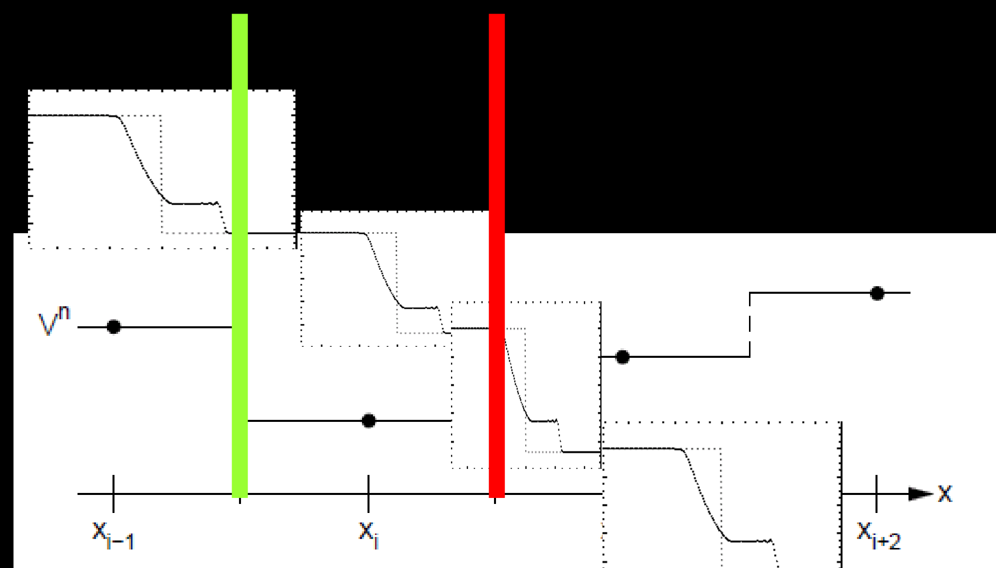
差分の式にする。

$$\frac{\mathbf{U}_i^{n+1} - \mathbf{U}_i^n}{\Delta t} = -\frac{\boxed{\mathbf{F}_{i-1/2}^n} - \boxed{\mathbf{F}_{i+1/2}^n}}{\Delta x}$$



$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\boxed{\mathbf{F}_{x_{i-1/2}}} - \boxed{\mathbf{F}_{i+1/2}}\right)$$

これらを求めるために、リーマン問題を解く！



精密・面倒

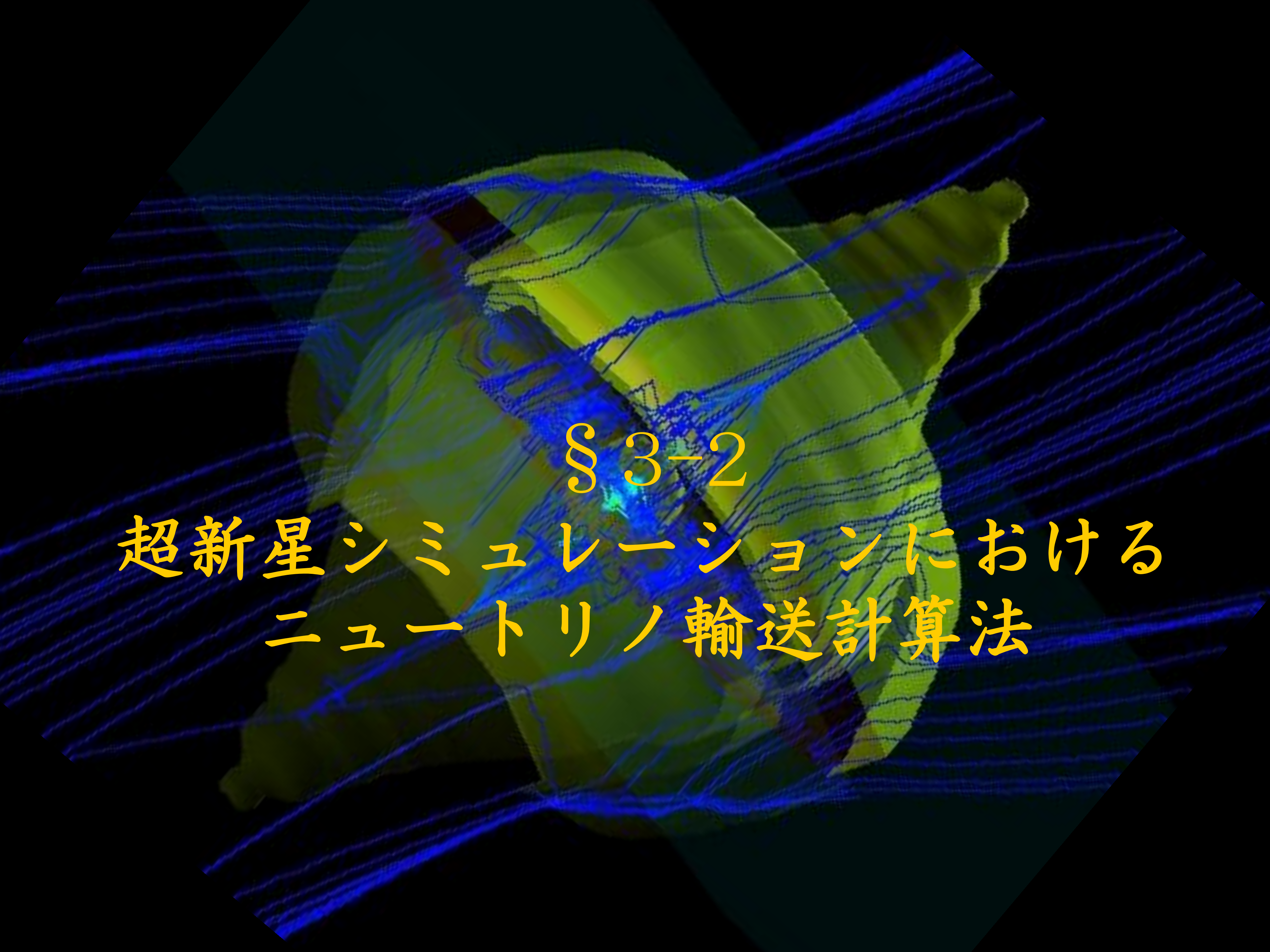
Godnov法（厳密解）

Roe 法（振幅の滑らかな変化を無視）

HLLD・C法（fast/slowを区別しない,alfven）

HLL法（中間状態を一つだけ）

簡単・粘性大



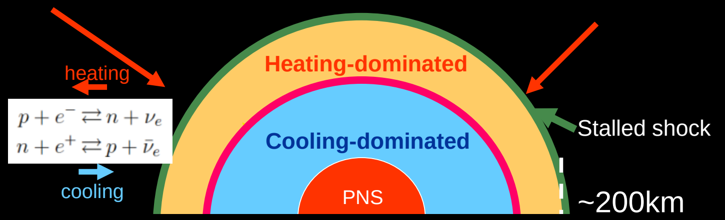
§ 3-2

超新星シミュレーションにおける
ニュートリノ輸送計算法

多次元シミュレーションでニュートリノ加熱駆動爆発をおこすのに必要な要素

✓ニュートリノ輻射パート：

Neutrino heating depends on neutrino luminosities, spectra, and angular distributions.



$$\dot{\epsilon} = \frac{X_n}{\lambda_0^a}\frac{L_{\nu_e}}{4\pi r^2}\langle E_{\nu_e}^2\rangle\langle\frac{1}{\mathcal{F}}\rangle + \frac{X_p}{\bar{\lambda}_0^a}\frac{L_{\bar{\nu}_e}}{4\pi r^2}\langle E_{\bar{\nu}_e}^2\rangle\langle\frac{1}{\bar{\mathcal{F}}}\rangle$$

※ちなみに

$f(t,x,y,z,p_x,p_y,p_z)$

SN環境では、
ニュートリノはmassless
E = cp

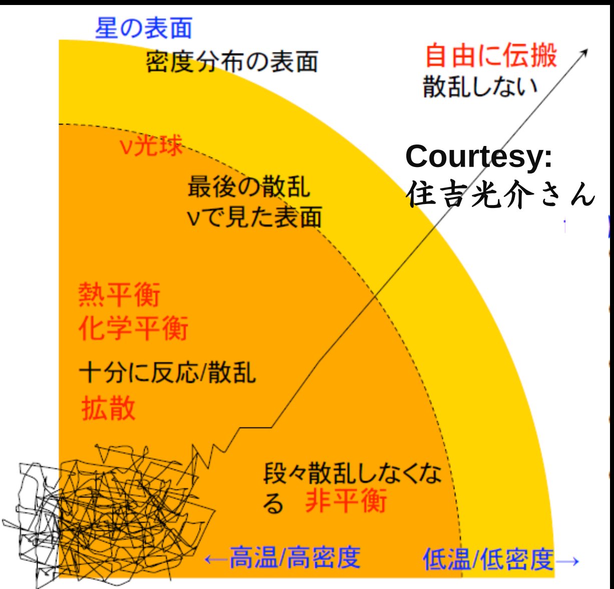
$$f(t,r,\theta,\phi,E,\theta_p,\phi_p)$$
$$E_R(t,r,\theta,\phi,E) = \int d\theta_p\, d\phi_p\, f$$
$$E_R(t,r,\theta,\phi) = \int dE\, d\theta_p\, d\phi_p\, f$$

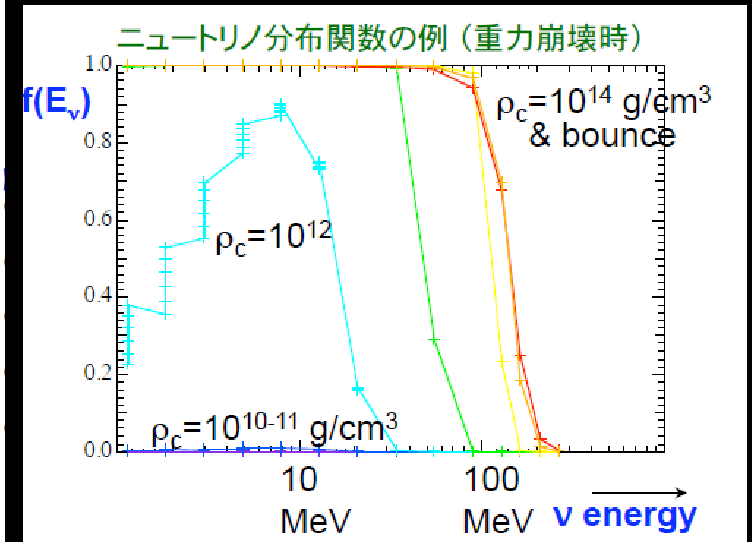
"MGMA"(6 dimensional problem)

"MG"(Multi energy-Group：エネルギー群) or IDS(isotropic diffusion source approximation)

"Gray (no energy-dependence)"

（詳細については第３回目で）





✓ニュートリノ分布関数
ごく中心部を除いて
熱分布(Fermi-Dirac分布)ではない。 $f_\nu(E_\nu) = \frac{1}{\exp{(E_\nu - \mu_\nu)/k_B T} + 1}$

⇒

少なくとも、
Energy依存性を残した
輻射輸送計算が不可欠
(multi-energy group輸送)
（エネルギー多群輸送）

解くべきはBoltzmann equation

$$\frac{\partial f_\nu}{\partial t} + \frac{d\vec{r}}{dt}\cdot\frac{\partial f_\nu}{\partial \vec{r}} + \frac{d\vec{p}}{dt}\cdot\frac{\partial f_\nu}{\partial \vec{p}} = \left.\frac{df_\nu}{dt}\right|_{\rm coll}$$

左辺：ニュートリノ数の変動
右辺：衝突項(Collisional term)
反応によるニュートリノ数の変動

✓超新星コードにマイクロ物理を入れるロードマップ

Easy

(1)Simple deleptonization:「Ye処方」(Ye(ρ)で電子捕獲を扱う)

(2)Neutrino leakage scheme:「ニュートリノ漏れ出し法」
(ニュートリノ冷却のみ近似的に扱う)

(3)Simple deleptonization + Light-bulb treatment:「ライトバルブ近似」
(ニュートリノ加熱を手で入れる)

(4)Single energy flux-limited diffusion:「グレイ輸送」 $f_\nu(t, r, \theta, \phi)$

(5) Multi-energy flux-limited diffusion:「マルチグループ輸送+FLD」
Isotropic Diffusion Source Approximation(IDSA) $f_\nu(t, r, \theta, \phi, E_\nu)$

(5') Ray-by-ray Boltzmann transport :「マルチグループ輸送+α」 $f_\nu(t, r, \theta, \phi, E_\nu, \theta_\nu)$

(6) Multi-angle Boltzmann transport:「マルチエネルギー・マルチアングル輸送」
$f_\nu(t, r, \theta, \phi, E_\nu, \theta_\nu, \phi_\nu)$

Hard

解くべきはBoltzmann equation

$$\frac{\partial f_\nu}{\partial t} + \frac{d\vec{r}}{dt}\cdot\frac{\partial f_\nu}{\partial \vec{r}} + \frac{d\vec{p}}{dt}\cdot\frac{\partial f_\nu}{\partial \vec{p}} = \left.\frac{d f_\nu}{dt}\right|_{\mathrm{coll}}$$

✓超新星コードにマイクロ物理を入れるロードマップ

Easy

6 months
Only if your hydro is robust

Simple deleptonization

ニュートリノクーリングのみ入る

Neutrino leakage scheme

Simple deleptonization + Light-bulb treatment

ニュートリノ加熱が「手」で入る。

Single energy flux-limited diffusion

✓ニュートリノ加熱・冷却が パラメータなしに入る

✓ ただ陰的解法が不可欠 (implicit scheme)

Multi-energy flux-limited diffusion,
Isotropic Diffusion Source Approximation

Ray-by-ray Boltzmann transport

Multi-angle Boltzmann transport

> 1 year (or a life work!)

Hard

✓Ye 処方

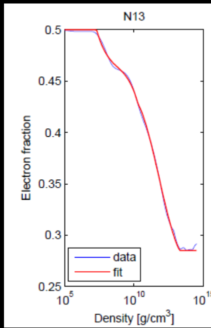
球対称ボルツマン輸送計算から得られたYe(ρ)のfitting formula を使う。

(Pros) Very easy to implement.

(often employed in GR simulations:
Dimmelmeier et al. (2007), Ott et al. (2008))

$$Y_e(x) = \frac{1}{2}(Y_2 + Y_1) + \frac{x}{2}(Y_2 - Y_1) + Y_c\left[1 - |x| + 4|x|(|x| - 1/2)(|x| - 1)\right].$$

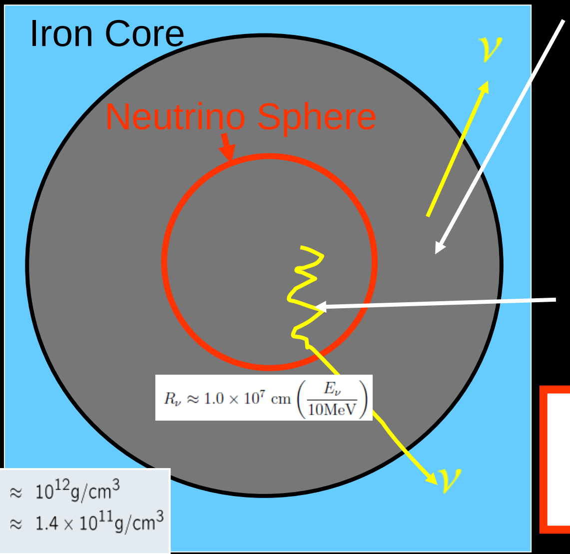
$$x(\rho) = \max\left[-1, \min\left(1, \frac{2\log\rho - \log\rho_2 - \log\rho_1}{\log\rho_2 - \log\rho_1}\right)\right]$$



(Cons) バウンス前しか使えない。
親星が違う時の妥当性。
球対称のシステムのみ有効。

✓Neutrino leakage scheme (NLS)

(van Riper 1981, Bludman et al. 1981,
Rosswog & Liebendoerfer 2003, Kotake et al. 2003)



$$\rho_{center} \approx 10^{12}\mathrm{g/cm^3}$$
$$\rho_{trap} \approx 1.4 \times 10^{11}\mathrm{g/cm^3}$$

- Outside the neutrino sphere, neutrinos are assumed to vanish instantaneously.

$$\frac{\mathrm{d}Y_e}{\mathrm{d}t} = \Gamma_{\mathrm{e-capture}}$$ assuming $Y_\nu = 0$

- Inside the neutrino sphere, the beta equilibrium is assumed.

$$Y_l = Y_e - Y_{\nu_e} + Y_{\bar{\nu}_e}$$

$$\frac{dY_l}{dt} = -\frac{Y_{\nu_e}}{\tau_{\mathrm{esc}}(\epsilon_{\nu_e})} + \frac{Y_{\bar{\nu}_e}}{\tau_{\mathrm{esc}}(\epsilon_{\bar{\nu}_e})}$$

$$\frac{de}{dt} = -\epsilon_{\nu_e}\frac{Y_{\nu_e}}{\tau_{\mathrm{esc}}(\epsilon_{\nu_e})} - \epsilon_{\bar{\nu}_e}\frac{Y_{\bar{\nu}_e}}{\tau_{\mathrm{esc}}(\epsilon_{\bar{\nu}_e})}$$

✓Ye 処方

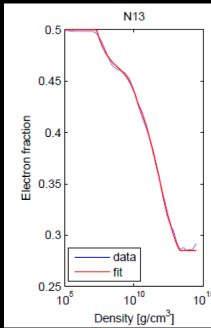
球対称ボルツマン輸送計算から得られたYe(ρ)のfitting formula を使う。

(Pros) Very easy to implement.

(often employed in GR simulations: Dimmelmeier et al. (2007), Ott et al. (2008))

$$Y_e(x) = \frac{1}{2}(Y_2+Y_1) + \frac{x}{2}(Y_2-Y_1) + Y_c\left[1-|x|+4|x|(|x|-1/2)(|x|-1)\right].$$

$$x(\rho) = \max\left[-1, \min\left(1, \frac{2\log\rho - \log\rho_2 - \log\rho_1}{\log\rho_2 - \log\rho_1}\right)\right]$$

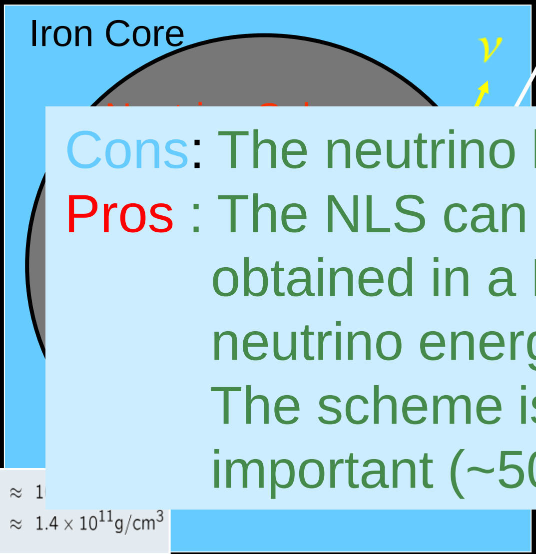


(Cons) バウンス前しか使えない。
親星が違う時の妥当性。
球対称のシステムのみ有効。

✓Neutrino leakage scheme (NLS)

(van Riper 1981, Bludman et al. 1981, Rosswog & Liebendoerfer 2003, Kotake et al. 2003)

- Outside the neutrino sphere, neutrinos are assumed to vanish instantaneously.



$\frac{dY_e}{}$ = … assuming $Y_\nu = 0$

…ed.

$\rho_{center} \approx 1$…

$\rho_{trap} \approx 1.4 \times 10^{11}$ g/cm^3

Cons: The neutrino heating cannot be treated.

Pros : The NLS can reproduce important features obtained in a Boltzmann simulation, like evolution of neutrino energy, luminosity, etc, to some extent.
The scheme is valid only before the neutrino heating becomes important (~50 ms after bounce).

Roadmap to implement the supernova microphysics to your code!

6 months
Only if your hydro is robust

Easy

Simple deleptonization

The neutrino cooling
can be taken into account.

Neutrino leakage scheme

Matthias parametrization + Light-bulb treatment

The neutrino heating,
but only parametrically.

Single energy flux-limited diffusion

✓The neutrino heating/cooling
without any parameters.

Multi-energy flux-limited diffusion,
Isotropic Diffusion Source Approximation

✓ Implicit schemes are needed
to treat accurately
the matter-neutrino coupling
as well as to solve the
Boltzmann equation !

Ray-by-ray Boltzmann transport

Multi-angle Boltzmann transport

Hard

> 1 year (or a life work!)

(Scheck et al. 04, Ohnishi et al. 07, Murphy & Burrows 08, Nordhaus et al. 10)

✓Matthias' recipe + light-bulb method

ライト・バルブ法;

原子中性子星から照らされるニュートリノ光度を手で与える。
(type I simulationでよくつかわれる)

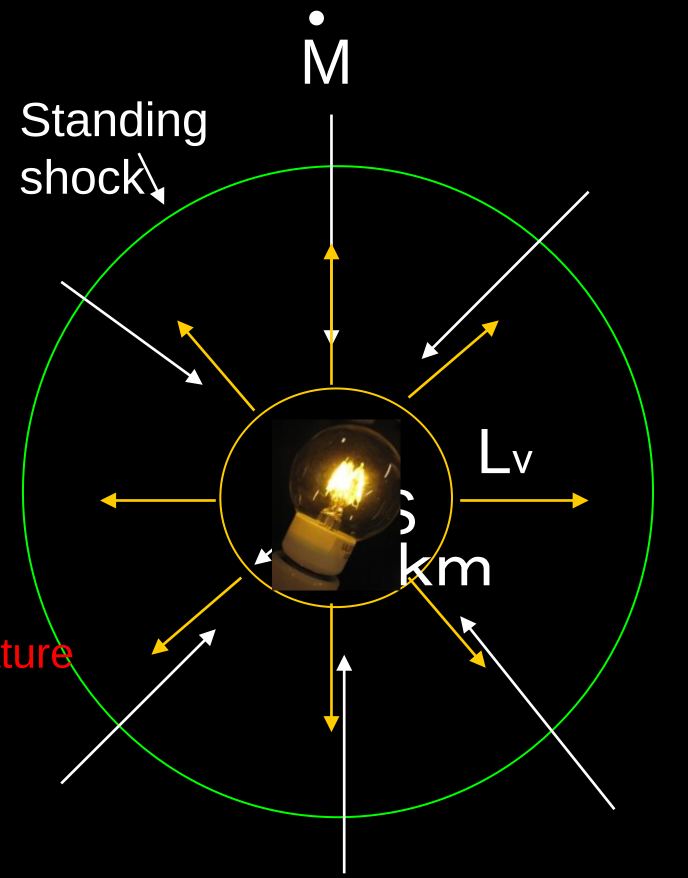
$$\partial_t (\rho E) = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{u} E) + p\mathbf{u} + \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{g} + \rho(\mathcal{H} - \mathcal{C})$$

$$\mathcal{H} = 1.544 \times 10^{20} \left(\frac{L_{\nu_e}}{10^{52}\ \mathrm{erg\ s^{-1}}}\right) \boxed{\left(\frac{T_{\nu_e}}{4\ \mathrm{MeV}}\right)^2} \times \left(\frac{100\mathrm{km}}{r}\right)^2 (Y_\mathrm{n} + Y_\mathrm{p})\, e^{-\tau_{\nu_e}} \left[\frac{\mathrm{erg}}{\mathrm{g\ s}}\right]$$

Neutrino temperature given by hand.

and

$$\mathcal{C} = 1.399 \times 10^{20} \left(\frac{T}{2\ \mathrm{MeV}}\right)^6 (Y_\mathrm{n} + Y_\mathrm{p})\, e^{-\tau_{\nu_e}} \left[\frac{\mathrm{erg}}{\mathrm{g\ s}}\right]$$



(Pros): Qualitative effects of neutrino heating on convection or hydrodynamic instability can be studied.

(Cons): The neutrino heating is completely an input parameter !

Roadmap to implement the supernova microphysics to your code!

Easy

6 months
Only if your hydro is robust

Simple deleptonization

Neutrino leakage scheme

The neutrino cooling
can be taken into account.

Matthias parametrization + Light-bulb treatment

The neutrino heating,
but only parametrically.

Single energy flux-limited diffusion

Multi-energy flux-limited diffusion,
Isotropic Diffusion Source Approximation

Ray-by-ray Boltzmann transport

Multi-angle Boltzmann transport

✓The neutrino heating/cooling
without any parameters.

✓ Implicit schemes are needed
to treat accurately
the matter-neutrino coupling
as well as to solve the
Boltzmann equation!

Hard

> 1 year (or a life work!)

Why implicit scheme（陰解法）is needed ?

absorption

$$\nu_e + n \rightleftarrows e + p$$

emission

j: emissivity

λ:　absorptivity

$$\frac{\partial f_\nu}{\partial t} = \boxed{j_{\rm emit}}(1 - f_\nu) - \boxed{\frac{1}{\lambda_{\rm abs}}} f_\nu = j_{\rm emit}\left(1 - \frac{f_\nu}{f_\nu^{\rm eq}}\right)$$

Note that $1/\lambda^{(a)}(\omega) = \exp\left\{\beta\left[\omega - (\mu_p + \mu_e - \mu_n)\right]\right\} j(\omega)$

If solved explicitly,,,

$$\frac{f^{n+1} - f^n}{\Delta t} = j\left(1 - \frac{f^n}{f^{\rm eq}}\right)$$

$$f^{n+1} = f^n + j\left(1 - \frac{f^n}{f^{\rm eq}}\right)\Delta t$$

$$\tau_{\rm weak} < 1\mu{\rm sec} \ll \tau_{\rm dyn} \sim 1{\rm msec}$$

$$\Delta t \to \infty : f^{n+1} \to \infty$$

The implicit treatment is stable !

$$\frac{f^{n+1} - f^n}{\Delta t} = j\left(1 - \frac{f^{n+1}}{f^{\rm eq}}\right)$$

$$f^{n+1} = \frac{f^n + j\Delta t}{1 + \frac{j}{f^{\rm eq}}\Delta t}$$

$$\Delta t \to \infty : f^{n+1} \to f^{\rm eq}$$

ボルツマン方程式の右辺：「衝突項」の計算法

$$\left(\frac{df}{cdt}\right)_{\rm coll} = B_{\rm AE} + B_{\rm NES} + B_{\rm IS} + B_{\rm TP}$$

Neutrino interactions	Correspondence to Eq. (1.29)
$\nu_e + n \rightleftarrows e + p$	AE
$\bar{\nu}_e + p \rightleftarrows e^+ + n$	AE
$\nu_e + A \rightleftarrows e + A'$	AE
$\nu + e \rightleftarrows \nu + e$	NES
$\nu + N \rightleftarrows \nu + N$	IS
$\nu + A \rightleftarrows \nu + A$	IS
$e + e^+ \rightleftarrows \nu + \bar{\nu}$	TP

Emission and absorption

$$B_{\rm AE} = j(1-f) - f/\lambda^a,$$

<O(100) MeV

||

等エネルギー散乱 (M_{nuc}~1GeV>>Ev）

$$B_{\rm IS} = \frac{1}{c(2\pi\hbar c)^3}\omega^2 \int_{-1}^{1} d\mu' \int_0^{2\pi} d\phi R^0_{\rm IS}(\omega,\omega, \cos\theta)[f(\mu',\omega) - f(\mu,\omega)],$$

非弾性散乱 inelastic

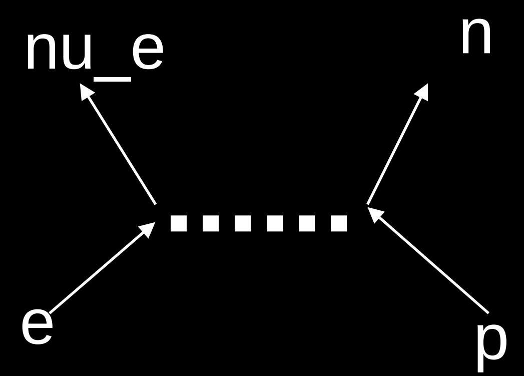
$$\begin{aligned} B_{\rm NES} \;=\; & [1-f]\frac{1}{c(2\pi\hbar c)^3}\int_0^\infty \omega'^2 d\omega' \int_{-1}^{1} d\mu' f(\mu',\omega') \int_0^{2\pi} d\phi R^{\rm in}_{\rm NES}(\omega,\omega',\cos\theta) \\ & - f\frac{1}{c(2\pi\hbar c)^3}\int_0^\infty \omega'^2 d\omega' \int_{-1}^{1} d\mu' [1-f(\mu',\omega')] \int_0^{2\pi} d\phi R^{\rm out}_{\rm NES}(\omega,\omega',\cos\theta), \; (\end{aligned}$$

ペア反応

$$\begin{aligned} B_{\rm TP} \;=\; & [1-f]\frac{1}{c(2\pi\hbar c)^3}\int_0^\infty \omega'^2 d\omega' \int_{-1}^{1} d\mu' \int_0^{2\pi} d\phi R^p_{\rm TP}(\omega,\omega',\cos\theta)[1-\bar{f}(\mu',\omega')] \\ & - f\frac{1}{c(2\pi\hbar c)^3}\int_0^\infty \omega'^2 d\omega' \int_{-1}^{1} d\mu' \int_0^{2\pi} d\phi R^a_{\rm TP}(\omega,\omega',\cos\theta)\bar{f}(\mu',\omega'), \qquad (1.34) \end{aligned}$$

$$\nu_e + n \rightleftarrows e + p$$

(Bruenn 1985,ApJS)



emission

$$B_{\mathrm{AE}} = \boxed{j(1-f)} - \boxed{f/\lambda^a}$$

j: emissivity

λ: absorptivity

The matrix element:

$$M = \frac{G}{\sqrt{2}} \bar{u}_p(p_p)\gamma^\mu(g_V - g_A\gamma_5)u_n(p_n)\bar{u}_e(p_e)\gamma_\mu(1-\gamma_5)u_\nu(q)$$

See e.g., Bjorken & Donell

$$r = \frac{G^2}{\omega E_e E_p E_n}(2\pi)^4\delta^4(q + p_n - p_e - p_p)\left[(g_V + g_A)^2 p_p\cdot p_e\, p_n\cdot q + (g_V - g_A)^2 p_p\cdot q\, p_n\cdot p_e - (g_V^2 - g_A^2)M_n M_p p_e\cdot q\right]$$

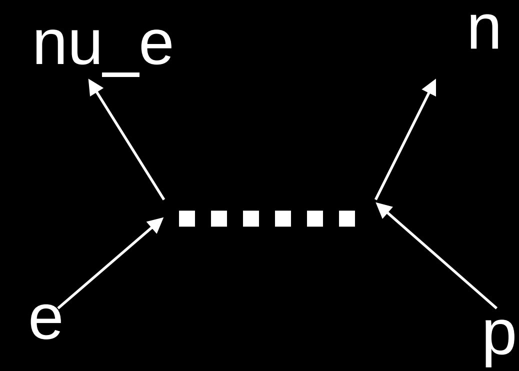
$$\left\{\begin{matrix} j(\omega) \\ 1/\lambda^{(a)}(\omega) \end{matrix}\right\} = \int\frac{d^3p_p}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3p_n}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3p_e}{(2\pi)^3}\left\{\begin{matrix} 2F_p(E_p)[1-F_n(E_n)]2F_e(E_e)r(p_p + p_e \to p_n + q) \\ [1-F_p(E_p)]2F_n(E_n)[1-F_e(E_e)]r(p_n + q \to p_p + p_e) \end{matrix}\right\}$$

$$j(\omega) = \frac{G^2}{\pi}\eta_{pn}(g_V^2 + 3g_A^2)F_e(\omega + Q)(\omega + Q)^2\left[1 - \frac{M_e^2}{(\omega + Q)^2}\right]^{1/2}.$$

$$1/\lambda^{(a)}(\omega) = \frac{G^2}{\pi}\eta_{np}(g_V^2 + 3g_A^2)[1 - F_e(\omega + Q)](\omega + Q)^2\left[1 - \frac{M_e^2}{(\omega + Q)^2}\right]^{1/2},$$

$$\nu_e + n \rightleftarrows e + p$$

(Bruenn 1985,ApJS)



emission

$$B_{\mathrm{AE}} = \boxed{j(1-f)} - \boxed{f/\lambda^a}$$

j: emissivity

λ: absorptivity

The matrix element:

$$M = \frac{G}{\sqrt{2}} \bar{u}_p(p_p)\gamma^\mu(g_V - g_A\gamma_5)u_n(p_n)\bar{u}_e(p_e)\gamma_\mu(1-\gamma_5)u_\nu(q)$$

See e.g., Bjorken & Donell

$$r = \frac{G^2}{\omega E_e E_p E_n}(2\pi)^4\delta^4(q + p_n - p_e - p_p)\left[(g_V+g_A)^2 p_p\cdot p_e\, p_n\cdot q + (g_V - g_A)^2 p_p\cdot q\, p_n\cdot p_e - (g_V^2 - g_A^2)M_n M_p p_e\cdot q\right]$$

$$\left\{\begin{matrix} j(\omega) \\ 1/\lambda^{(a)}(\omega)\end{matrix}\right\} = \int\frac{d^3p_p}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3p_n}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3p_e}{(2\pi)^3}\left\{\begin{matrix} 2F_p(E_p)[1-F_n(E_n)]2F_e(E_e)r(p_p+p_e\to p_n+q) \\ [1-F_p(E_p)]2F_n(E_n)[1-F_e(E_e)]r(p_n+q\to p_p+p_e)\end{matrix}\right\}$$

$$j(\omega) = \frac{G^2}{\pi}\eta_{pn}(g_V^2+3g_A^2)F_e(\omega+Q)(\omega+Q)^2\left[1-\frac{M_e^2}{(\omega+Q)^2}\right]^{1/2},$$

✓ボルツマン方程式の右辺は頑張って計算できる。

✓ボルツマン方程式を解くためには、もうひとつのキーポイントが・・

$$1/\lambda^{(a)}(\omega) = \frac{G^2}{\pi}\eta_{np}(g_V^2+3g_A^2)[1-F_e(\omega+Q)](\omega+Q)^2\left[1-\frac{M_e^2}{(\omega+Q)^2}\right]^{1/2},$$

ボルツマン方程式の階層構造

$$\frac{\partial}{\partial t} f + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \nabla_{\boldsymbol{r}} f + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} \nabla_{\boldsymbol{p}} f = \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right)^{\mathrm{coll.}}$$

外力が加わっていない場合 $\dot{\boldsymbol{p}} \equiv 0$

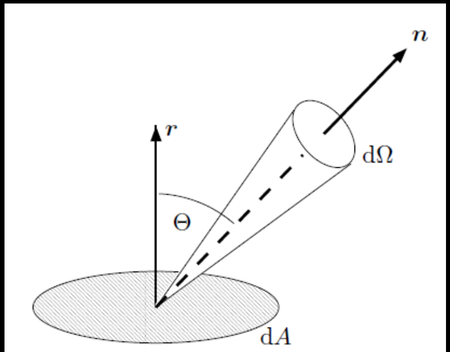
$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} f + \boldsymbol{n}\nabla_{\boldsymbol{r}} f = B$$

Specific intensityを定義する。

$$\mathcal{I} := \left(\frac{\epsilon}{hc}\right)^3 c \cdot f$$

$$\mathcal{I}(t, \boldsymbol{r}, \epsilon, \boldsymbol{n}) \mathrm{d}\Omega\, \mathrm{d}\epsilon\, \boldsymbol{n}\boldsymbol{r}/|\boldsymbol{r}|\, \mathrm{d}A\, \mathrm{d}t$$

輻射が単位立体角、単位エネルギー、
ある方向、dA、dtを通過する確率になる



Intensityの角度モーメント量

✓ゼロ次 ⇒ radiation energy

$$J(t, \boldsymbol{r}, \epsilon) := \frac{1}{4\pi}\int \mathrm{d}\Omega\, \mathcal{I}(t, \boldsymbol{r}, \epsilon, \boldsymbol{n}) \qquad = \frac{c}{4\pi} E(t, \boldsymbol{r}, \epsilon)$$

(scalar)

✓１次 ⇒ radiation flux（輻射フラックス）

$$H_i(t, \boldsymbol{r}, \epsilon) := \frac{1}{4\pi}\int \mathrm{d}\Omega\, n_i \mathcal{I}(t, \boldsymbol{r}, \epsilon, \boldsymbol{n}) \qquad = \frac{1}{4\pi} F_i(t, \boldsymbol{r}, \epsilon)$$

(vector)

✓2 次 ⇒ radiation pressure (輻射圧）

$$K_{ij}(t, \boldsymbol{r}, \epsilon) := \frac{1}{4\pi}\int \mathrm{d}\Omega\, n_i n_j \mathcal{I}(t, \boldsymbol{r}, \epsilon, \boldsymbol{n}) = \frac{c}{4\pi} P_{ij}(t, \boldsymbol{r}, \epsilon)$$

(tensor)

ボルツマン方程式の角度モーメント量

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} J + \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{H} &= S^{(0)} && (0^{\mathrm{th}}\text{-order moment equation}) \\
\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{H} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathsf{K} &= \boldsymbol{S}^{(1)} && (1^{\mathrm{st}}\text{-order moment equation}) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

どこまで行っても閉じない。

✓ Closure することが必要

(1) Flux limited diffusion法（流速制限法）
(2) M1 closure
(3) Variable Eddington factor法

ボルツマン方程式の解法(1/3)

Bruenn et al. 1985, Livne et al. 2005, Kotake et al. 2006

$$\partial_t E_\nu + \nabla F_\nu = Q_\nu^0 \qquad (0^{\text{th}}\text{-order moment equation})$$

$$\partial_t F_\nu + \nabla P_\nu = Q_\nu^1 \qquad (1^{\text{st}}\text{-order moment equation})$$

✓流速制限法（Flux-Limited-Diffusion)

$$f_\nu(t,m,\omega,\mu) = f_\nu^{(0)}(t,m,\omega) + \underline{f_\nu^{(1)}(t,m,\omega)\mu}$$

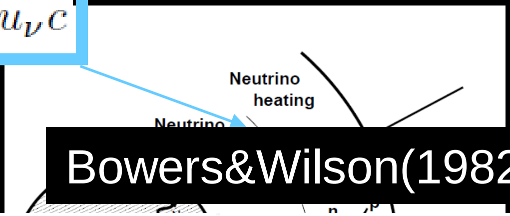
輻射は等方的と近似、等方からのずれの一次を入れる

Fickの法則から以下を仮定

$$F_\nu(\omega) = -\frac{c\lambda_\nu}{3}\left(\frac{\partial}{\partial r}u_\nu(\omega)\right)$$

$$F_\nu(\omega) = -\frac{c\Lambda_\nu}{3}\left(\frac{\partial}{\partial r}u_\nu(\omega)\right)$$

$\lambda_\nu \to \infty$ で $F_\nu > u_\nu c$



Bowers&Wilson(1982)

$$\Lambda_{\rm BW}(R_{\rm BW}) = \frac{1}{3+|R_{\rm BW}|\,\xi(R_{\rm BW})}$$

with

$$R_{\rm BW} \equiv -\lambda_t \cdot \frac{dE/dr}{E}$$

and

$$\xi(R_{\rm BW}) \equiv 1 + \frac{3}{1+\frac{1}{2}|R_{\rm BW}|+\frac{1}{8}|R_{\rm BW}|^2}.$$

Flux limiter

$$\Lambda_\nu \equiv \frac{3}{3+\lambda_\nu \frac{\left|\frac{\partial u_\nu}{\partial r}\right|}{u_\nu}} \cdot \lambda_\nu$$

$\lambda \to 0$ で $F_\nu \to F_\nu$(拡散), $\lambda \to \infty$ で $F_\nu \to u_\nu c$

ボルツマン方程式の解法(2/3)

Obergaulinger and Janka (2010)

$$\partial_t E_\nu + \nabla F_\nu = Q^0_\nu, \quad (0^{\text{th}}\text{-order moment equation})$$

$$\partial_t F_\nu + \nabla P_\nu = Q^1_\nu, \quad (1^{\text{st}}\text{-order moment equation})$$

✓M1 closure (1次のmomentの式まで解く)

$P_\nu = P_\nu(E_\nu, F_\nu)$ 階層性を閉じるためを仮定する。

Eddington tensorを以下の形に仮定する。

$$P^{ij}_\nu = \left(\frac{1-p_\nu}{2}\delta^{ij} + \frac{3p_\nu - 1}{2}\frac{F^i_\nu F^j_\nu}{F^2_\nu} \right) E_\nu.$$

(Audit et al. 2002)

Eddington factor

$$p_\nu = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}\left(6f^2_\nu - 2f^3_\nu + 6f^4_\nu\right)$$

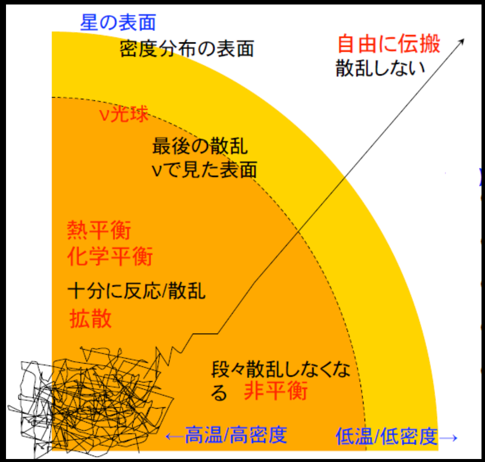
Flux factor

$$f_\nu = F_\nu / cE_\nu$$

Free-streaming limit
自由伝搬

Semi-transparent
遷移領域

Diffusion limit
拡散極限



☆Diffusion limitを取ると、fv →0
p_ν →1/3, Pv(輻射圧) → 1/3 Ev

☆streaming limitを取ると、fv →1
p_ν →1, Pv(輻射圧) → Ev

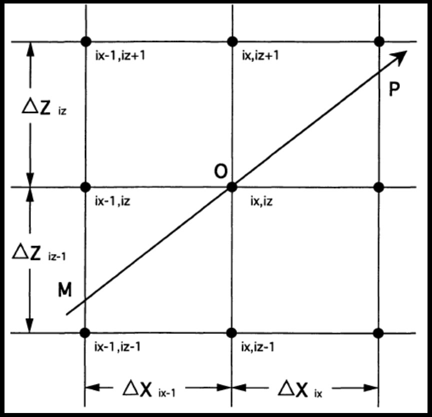
FLD、M1共に二つの極限状態を内挿したフォーマリズム

ボルツマン方程式の解法(3/3)

VE; Rampp & Janka (1998)
Sn: Livne et al. (04), Hubney & Burrows(06)

$$\partial_t E_\nu + \nabla F_\nu = Q^0_\nu \quad (0^{\text{th}}\text{-order moment equation})$$
$$\partial_t F_\nu + \nabla P_\nu = Q^1_\nu \quad (1^{\text{st}}\text{-order moment equation})$$

✓Variable Eddington factor method



✓Rayにそって実際に輸送方程式を解き、Ｉを決める(ray-method)

$$\frac{\partial I}{\partial s} = \chi(S - I)$$

$$I_O = I_M \exp\left(-\Delta\tau_M\right) + \int_0^{\Delta\tau_M} dt S(t) \exp\left[-(\Delta\tau_M - t)\right]$$

✓Intensityが求められたら、諸量が分かる

$$E = \frac{1}{c}\oint I(\boldsymbol{n})d\omega = \frac{1}{c}\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1} I(\mu, \Phi)d\mu d\Phi\ ,$$

$$P_{zz} = \frac{1}{c}\oint I(\boldsymbol{n})n_z n_z d\omega = \frac{1}{c}\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1} I(\mu, \Phi)\mu^2 d\mu d\Phi$$

✓S_N法 (Spectral ordinates method)

$$\frac{1}{c}\frac{\partial f_\nu}{\partial t} + \frac{\mu_\nu}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 f_\nu) + \frac{\sqrt{1-\mu_\nu^2}\cos\phi_\nu}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta f_\nu) + \frac{\sqrt{1-\mu_\nu^2}\sin\phi_\nu}{r\sin\theta}\frac{\partial f_\nu}{\partial\phi}$$
$$+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\mu_\nu}[(1-\mu_\nu^2)f_\nu] + \frac{\sqrt{1-\mu_\nu^2}\cos\theta}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi_\nu}(\sin\phi_\nu f_\nu) = \frac{1}{c}\left(\frac{\delta f_\nu}{\delta t}\right)_{collision}$$

Momentを取らず、直接ボルツマン方程式を角度方向まで差分を取って解く。
（formalismはstraightforwadだが、とにかく演算量が大変）

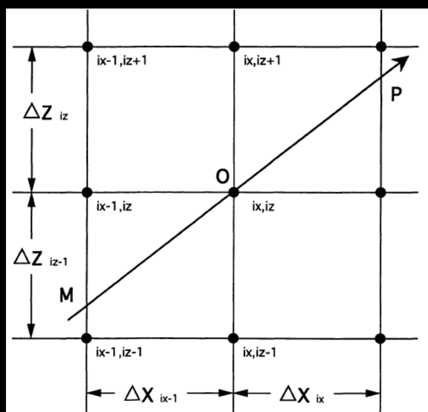
ボルツマン方程式の解法(3/3)

$$\partial_t E_\nu + \nabla F_\nu = Q_\nu^0 \quad (0^{\mathrm{th}}\text{-order moment e}$$

$$\partial_t F_\nu + \nabla P_\nu = Q_\nu^1 \quad (1^{\mathrm{st}}\text{-order moment e}$$

✓Variable Eddington factor method

✓Rayにそって



$$\frac{\partial I}{\partial s} = \chi(S - I)$$

✓Intensityが求

$$E = \frac{1}{c}\oint I(\boldsymbol{n})d\omega$$

$$P_{zz} = \frac{1}{c}\oint I(\boldsymbol{n})n_z n$$

✓S_N法 (Spectral ordinates method

$$\frac{1}{c}\frac{\partial f_\nu}{\partial t} + \frac{\mu_\nu}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 f_\nu) + \frac{\sqrt{1-\mu_\nu^2}\cos\phi_\nu}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin$$

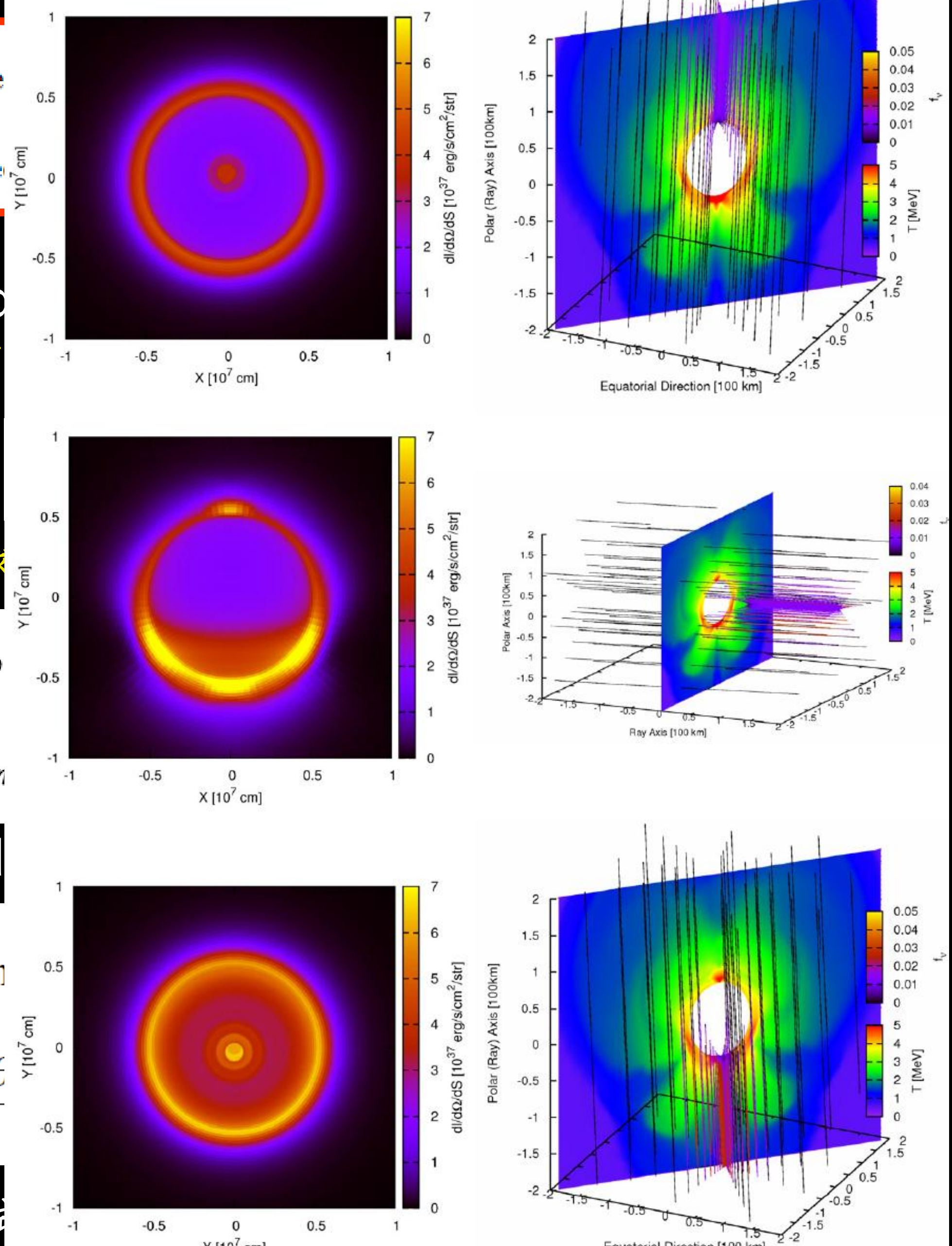
$$+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\mu_\nu}[(1-\mu_\nu^2)f_\nu] + \frac{\sqrt{1-\mu_\nu^2}\cos\theta}{r\sin\theta}$$

Momentを取らず、直接ボルツマン方程式

（formalismはstraightforwadだが、とにかく演算量が大変）

KOTAKE ET AL. **ApJ (2009)**

Ray-trace 計算の一例



ニュートリノ輸送計算法の長所と短所

	Diffusive regime	Semi-transparent regime	Transparent regime
Boltzmann solver (VEF,S_N)	Truncation errors in flux		Insufficient angular resolution
Flux-limited Diffusion, M1 closure		flux-factor is model-dependent	flux-factor is unknown
Ray-tracing method	Suffer from short mean free path	Limited by reaction	

2成分近似ボルツマン formalism (Basel-Tokyo)

The ideal argorthm combines the three **orange fields** !

２成分近似ボルツマン輸送法

Liebendoerfer et al. (09), ApJ

The neutrino distribution function “f” を2成分に分解する

$$f = f^t + f^s$$

f^t :trapped part – opaque region

f^s :streaming part – transparent region

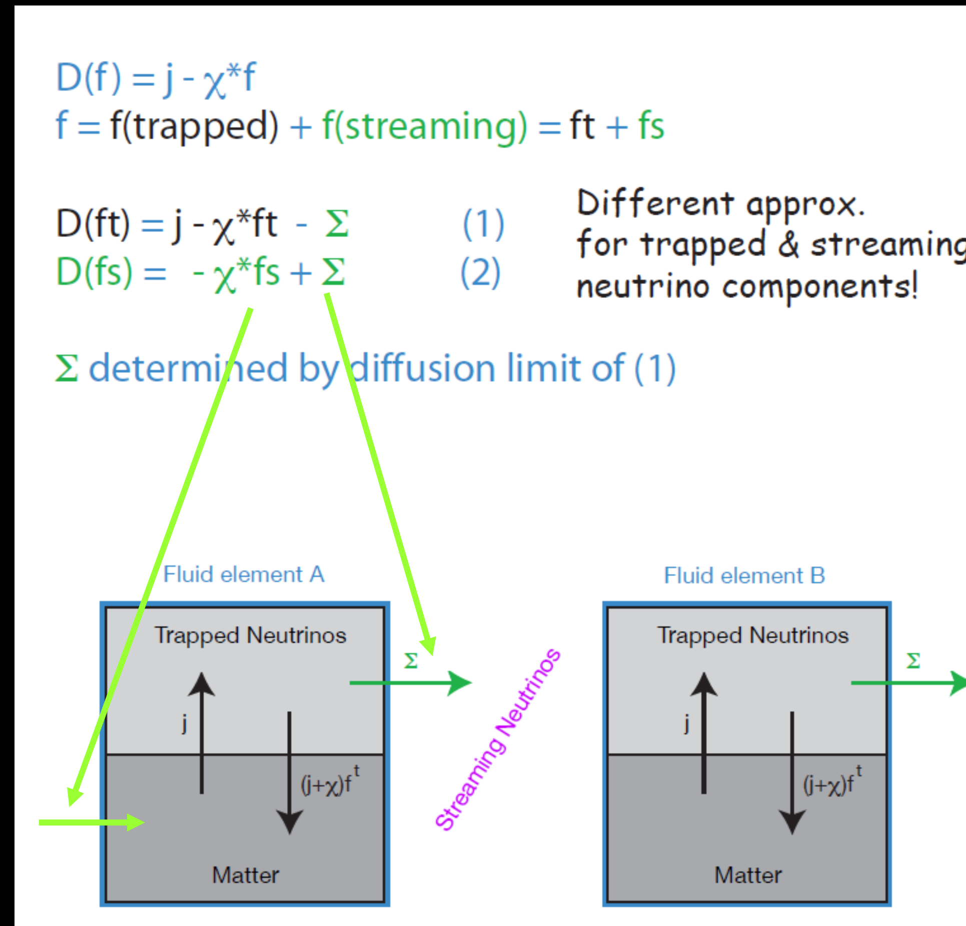
Boltzmann equation is then ,

$$D(f = f^t + f^s) = C = C^t + C^s$$

The two components are evolved separately ,

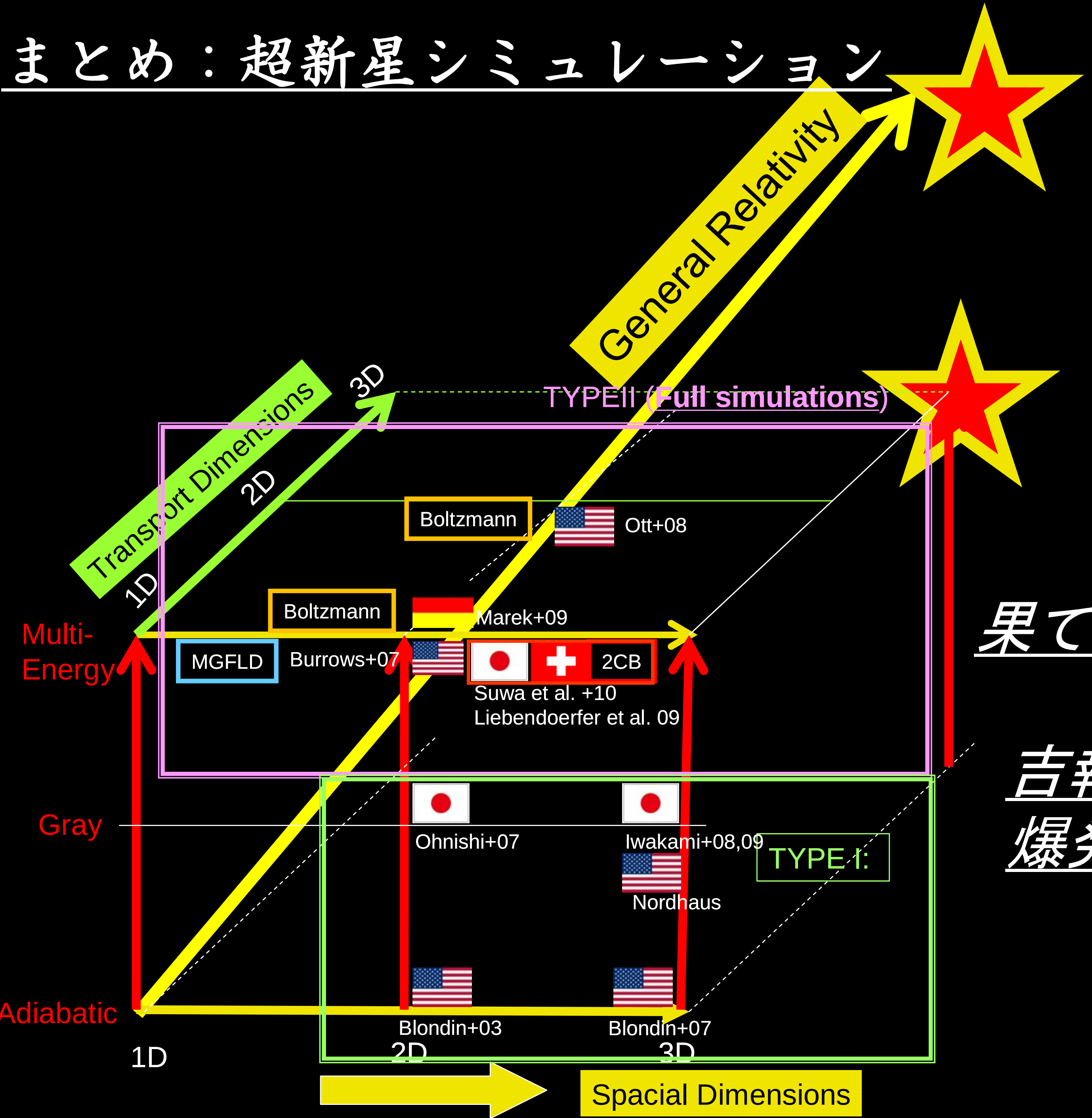
$$D(f^t) = C^t - \Sigma$$
$$D(f^s) = C^s + \Sigma$$

流体素片



Σ - is the (diffusion) term,
which converts trapped into streaming part and vice verse.
-is determined between the free-streaming and the β-equilibrium limit via a kind of flux limiter.

まとめ：超新星シミュレーション



果てしなき旅は続く・・

吉報:3D,GRみんな爆発には良さそう?

§3-3
超新星とガンマ線バースト

（以降の話の筋）

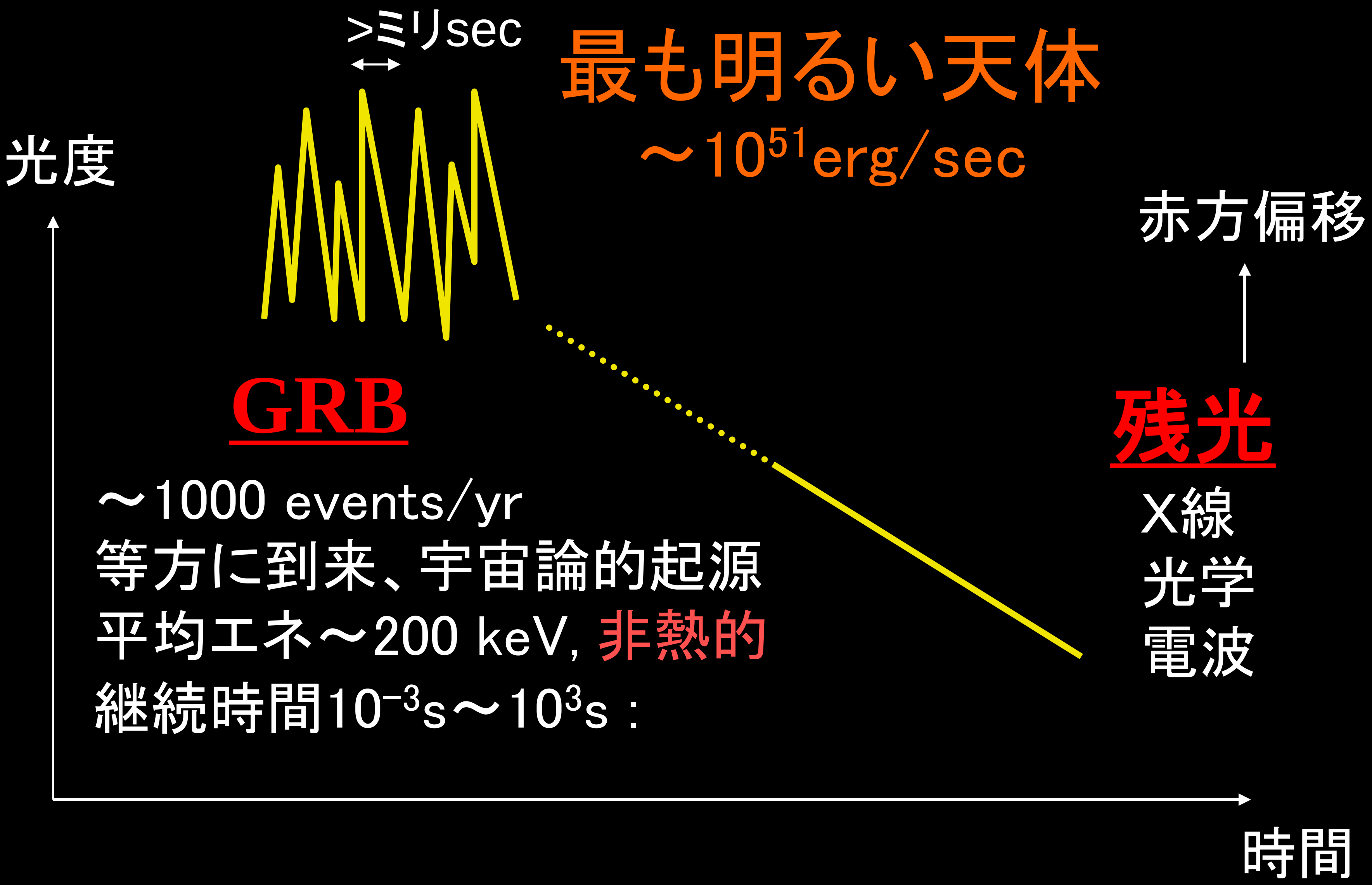
✓ガンマ線バースト(Gamma-Ray Burst):
ガンマ線がバースト的に観測される天体現象

✓過去40年に渡って起源が不明

✓超新星との相関が報告される(10年前)
普通の超新星じゃない極超新星

✓極超新星のエンジンの理解⇔恒星進化論の統一的解明

観測のまとめ



>ミリsec
最も明るい天体
〜10^{51}erg/sec
光度
GRB
〜1000 events/yr
等方に到来、宇宙論的起源
平均エネ〜200 keV, 非熱的
継続時間10^{-3}s〜10^{3}s：
赤方偏移
残光
X線
光学
電波
時間

GRBの時間変動

Fishman&Meegan(95)

フォトンカウント数

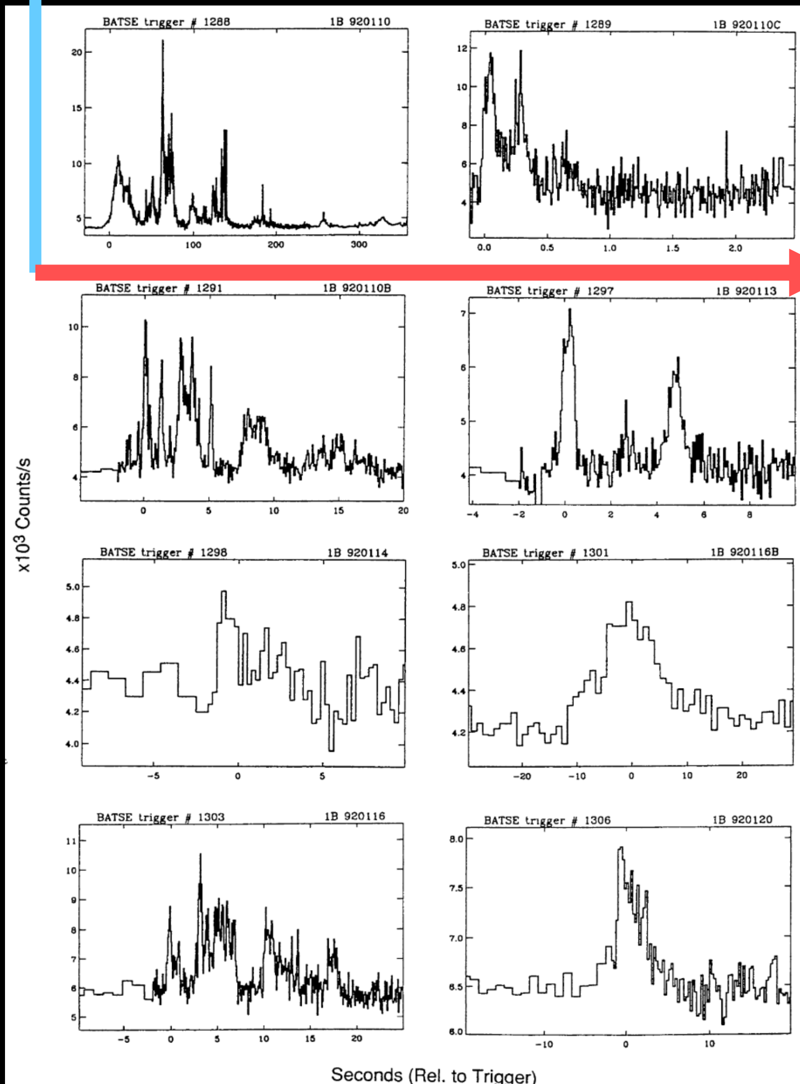
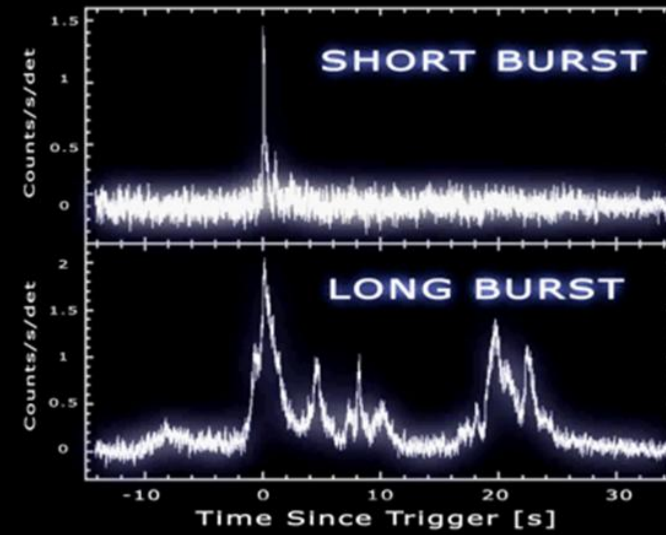


Figure 1 Sample page from the *First BATSE Catalog of Gamma-Ray Bursts* (Fishman et al 1994b), indicating the diversity in the time profiles, intensities, and durations of gamma-ray bursts.

時間

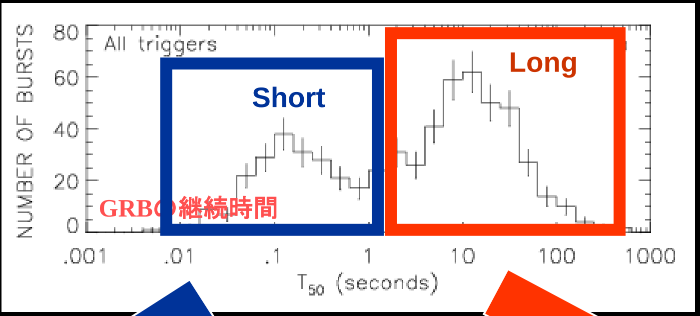


Long burst、Short burstの二極分布

それぞれタイムプロファイルが全然違う。ソースは何？

色々あるのですが

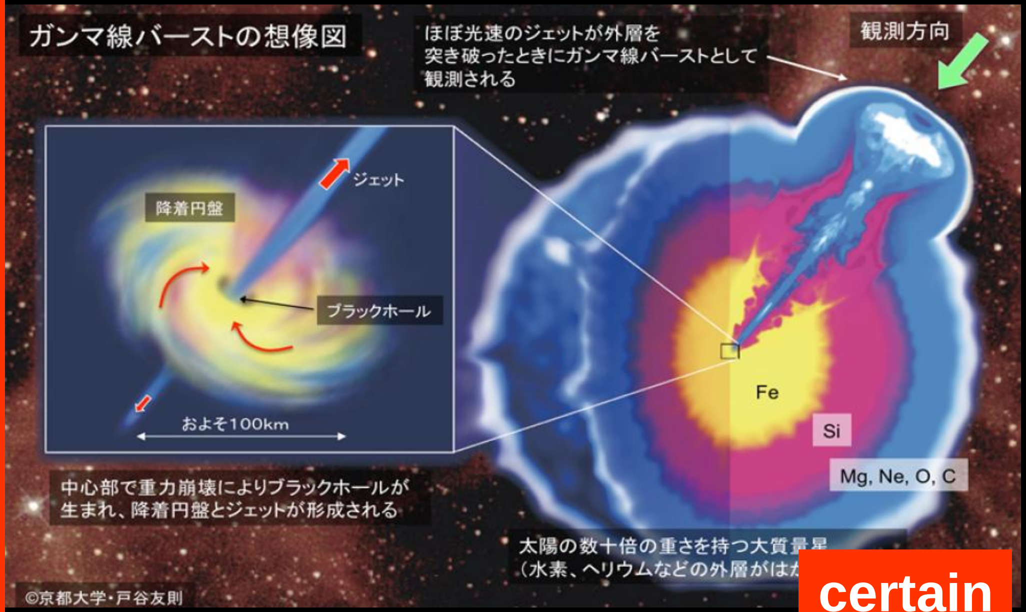
現在の理解



中性子星合体

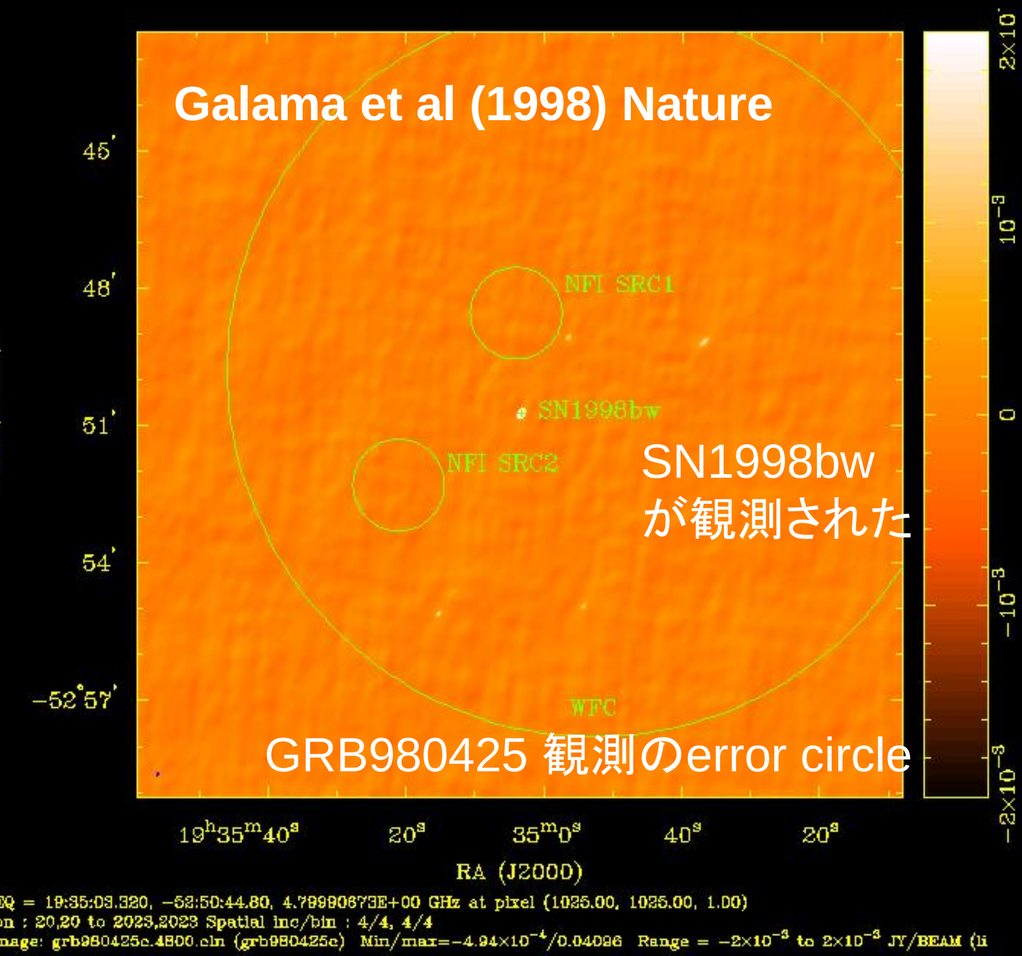
uncertain

超新星爆発



certain

謎の天体現象GRBと始めて相関が観測された天体
：超新星 だった！



イベントレート(per galaxy)

$R_{Ibc} \sim 10^{-2}\ yr^{-1}$

$R_{GRB} \sim \sim 10^{-7}$–$10^{-5}\ yr^{-1}$

Matsubayashi et al. 06

超新星とGRBが無相関とすると、10年で同期する確率：

$R_{comb} \sim 10^{-7}$

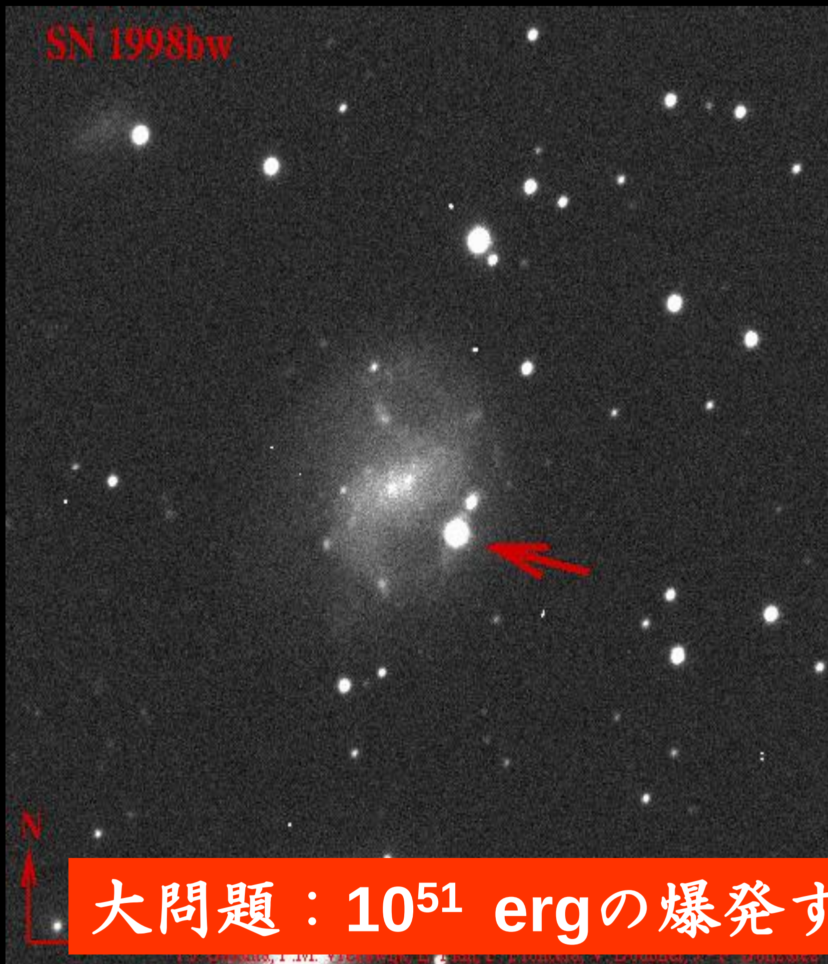
一方、数年の観測で

相関が実際観測された。

GRBと超新星は優位な相関がある！

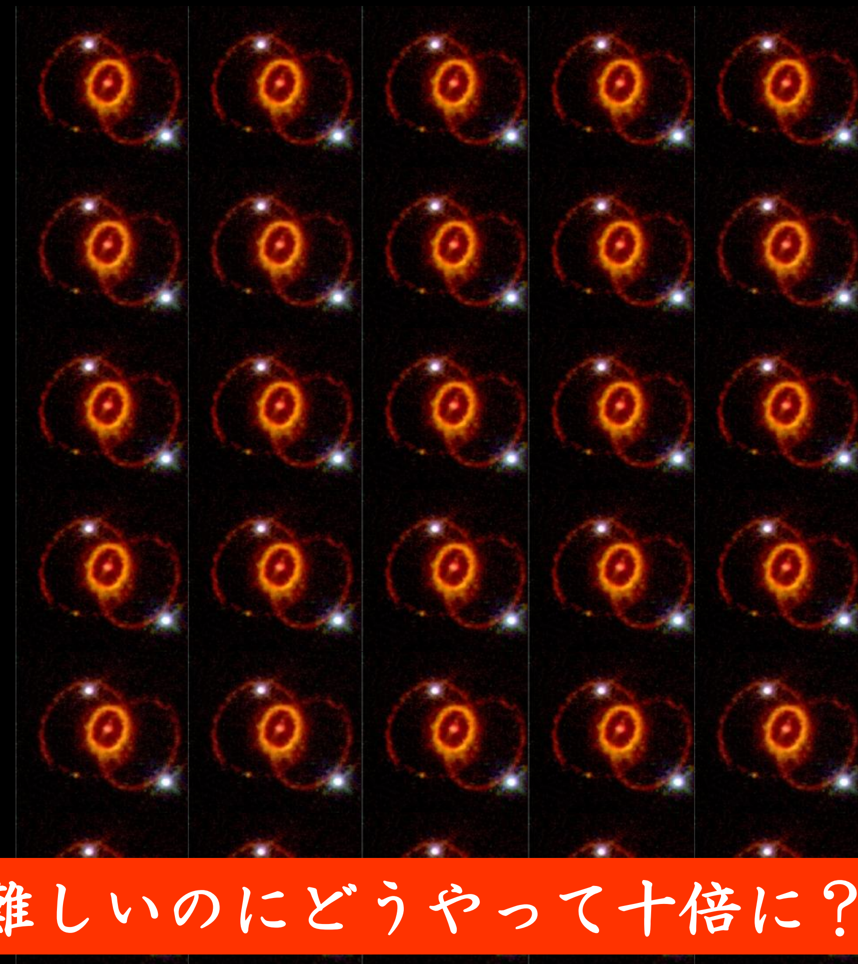
SN1998bw ：Hypernova(極超新星）

SN 1998bw



=

SN 1987A



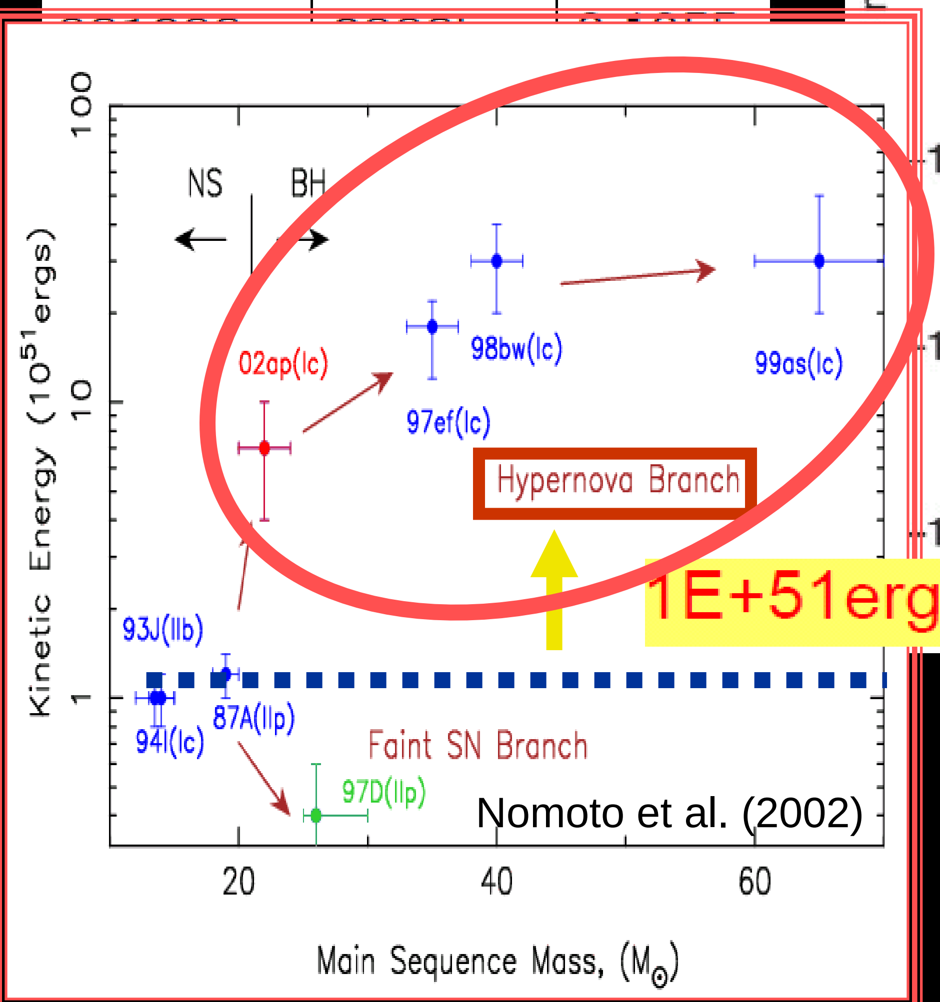
大問題：10^{51} ergの爆発すら難しいのにどうやって十倍に？

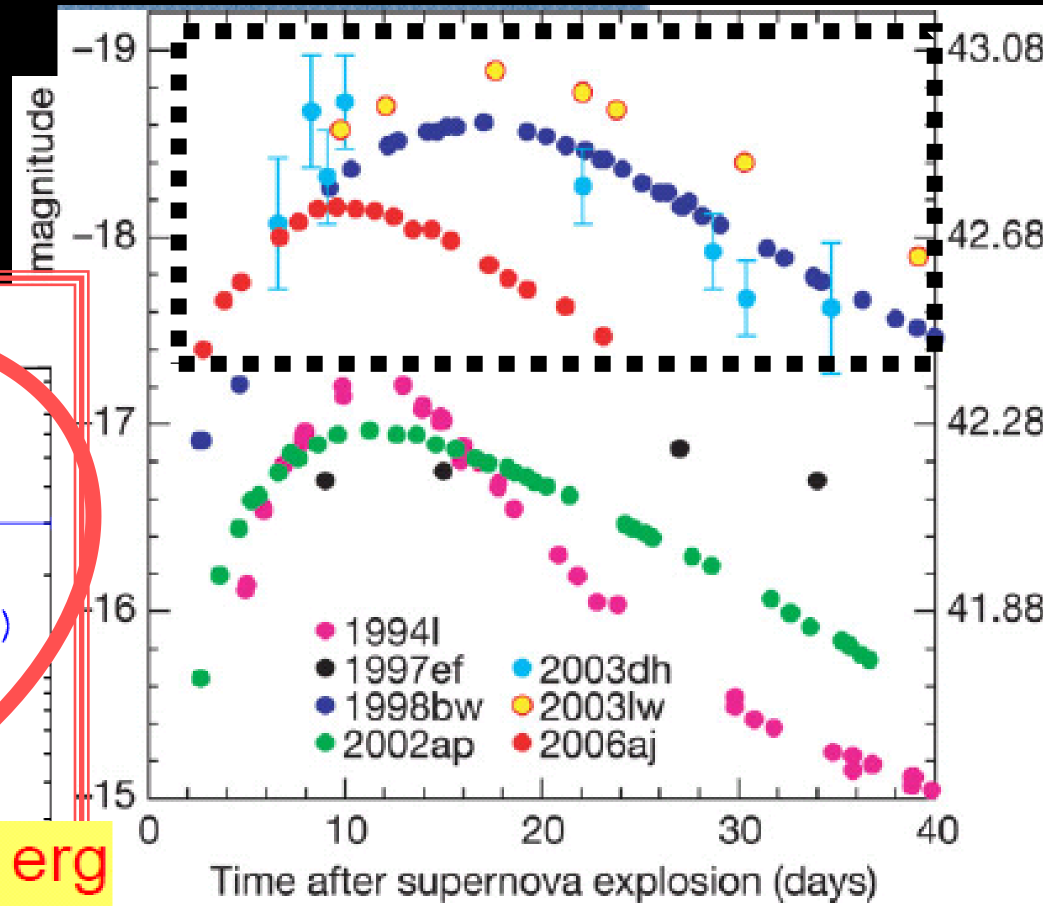
$E \sim 30 \times 10^{51}$ergs

$E \sim 1 \times 10^{51}$ergs

GRB(Long)と相関がある超新星は一般にenergetic

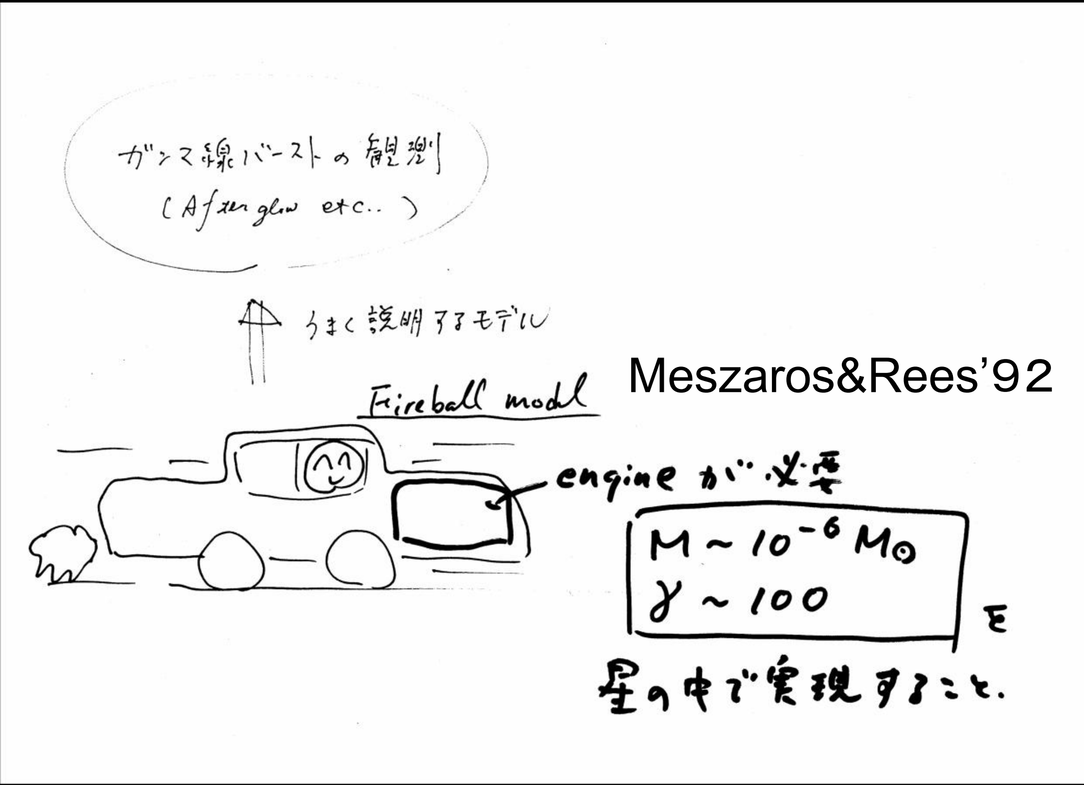
GRB/XRF	SN	z
980425	1998bw	0.0085
030329	2003dh	0.168



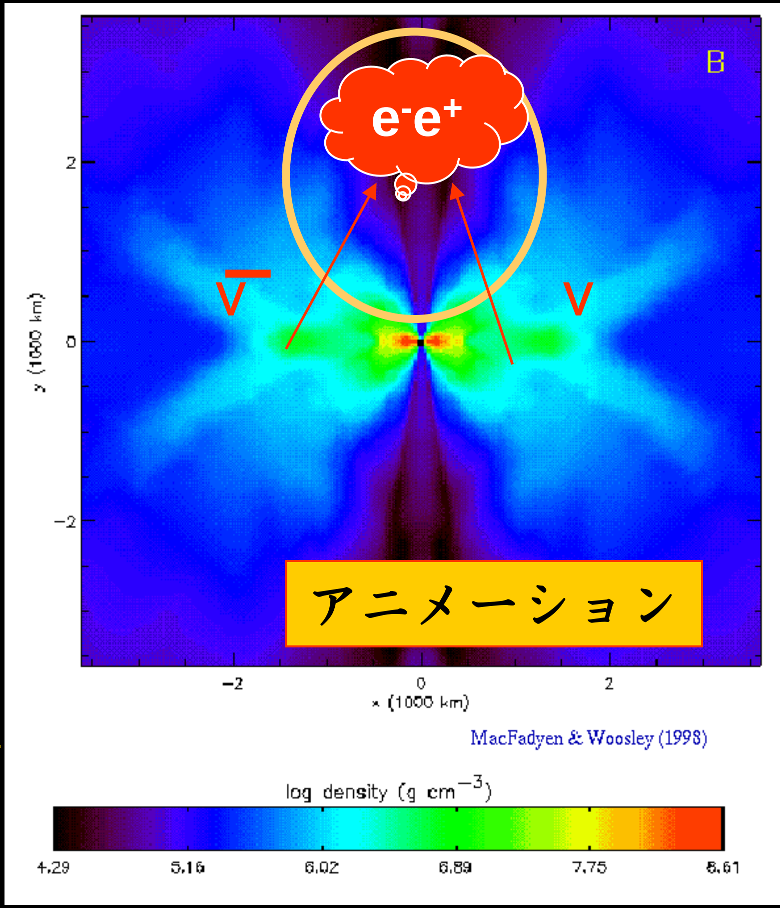


ふつうの超新星と極超新星は何が違うのか？
ちがうブランチに移る物理は何なのか？

「ブラックホール・回転・磁場」が鍵



Meszaros&Rees'92



MacFadyen & Woosley (1998)

エッセンス：狭い領域に莫大なエネルギー注入

✓ニュートリノ

$$\frac{dE_0}{dt} \simeq 2.23 \times 10^{51}\left(\frac{d\theta}{10^\circ}\right)^2\left[\frac{kT_{\rm eff}(3r_g)}{10\ {\rm MeV}}\right]^9 \times \left(\frac{r_g}{10\ {\rm km}}\right)^3 {\rm ergs\ s^{-1}}\ .$$

✓磁場

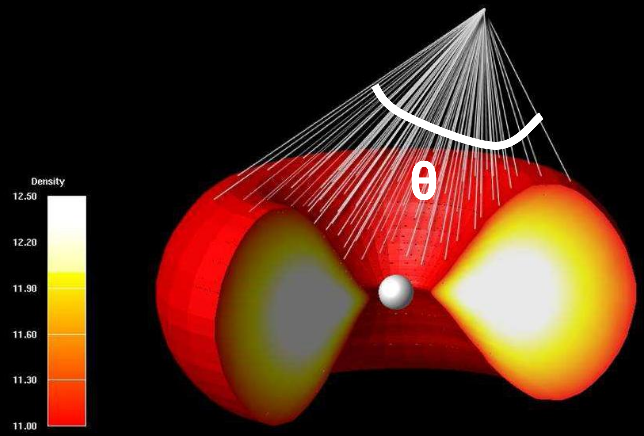
$$P = 1.7 \times 10^{50}\tilde{a}^2 f(\tilde{a})(\frac{M}{M_\odot})^2(\frac{< B_H >}{10^{15} gauss})^2\ erg/s$$

コラプサー・シナリオ
「Collapsar」: failed supernova

ニュートリノ駆動ガンマ線バースト

$\nu + \bar{\nu} \rightarrow e^+ + e^-$

Goodman 1987, Asano & Fukuyama 2000 (ApJ)



✓加熱率∝(1 – cos θ)

円盤の対称性を考えても軸状が一番温められる

✓ ニュートリノ加熱率

$$\frac{dE_0}{dt} = 5.76 \times 10^{50} \left[\frac{kT_{\rm eff}(3r_g)}{10\ {\rm MeV}}\right]^9 \left(\frac{r_g}{10\ {\rm km}}\right)^3 \ {\rm ergs\ s^{-1}} \quad \text{for } R_{\rm in} = 3r_g\,, \qquad (20)$$

$$= 1.05 \times 10^{53} \left[\frac{kT_{\rm eff}(3r_g)}{10\ {\rm MeV}}\right]^9 \left(\frac{r_g}{10\ {\rm km}}\right)^3 \ {\rm ergs\ s^{-1}} \quad \text{for } R_{\rm in} = 1.16r_g\,, \qquad (21)$$

Energetics 的には十分
ただし降着円盤の温度、半径に非常に敏感

ニュートリノ加熱率

反応率

$$\frac{dN(r)}{dt\,dV} = \int\int f_\nu(p_\nu, r) f_{\bar{\nu}}(p_{\bar{\nu}}, r)\sigma |v_\nu - v_{\bar{\nu}}| d^3p_\nu d^3p_{\bar{\nu}}$$

断面積:

$$\sigma = 2c^2 K G_F^2 (p_\nu \cdot p_{\bar{\nu}})$$

$$K(\nu_\mu \bar{\nu}_\mu) = K(\nu_\tau \bar{\nu}_\tau) = \frac{1 - 4\sin^2\theta_W + 8\sin^4\theta_W}{6\pi}$$

$$K(\nu_e \bar{\nu}_e) = \frac{1 + 4\sin^2\theta_W + 8\sin^4\theta_W}{6\pi}\,.$$

運動学:

$$(p_\nu \cdot p_{\bar{\nu}}) = \frac{\varepsilon_\nu \varepsilon_{\bar{\nu}}}{c^2}[1 - \cos(\theta\nu - \theta\bar{\nu})]$$

分布関数:

$$n(\varepsilon_\nu) = \frac{g_\nu}{(hc)^3} \frac{1}{\exp(\varepsilon_\nu / kT_{\rm eff}) + 1}$$

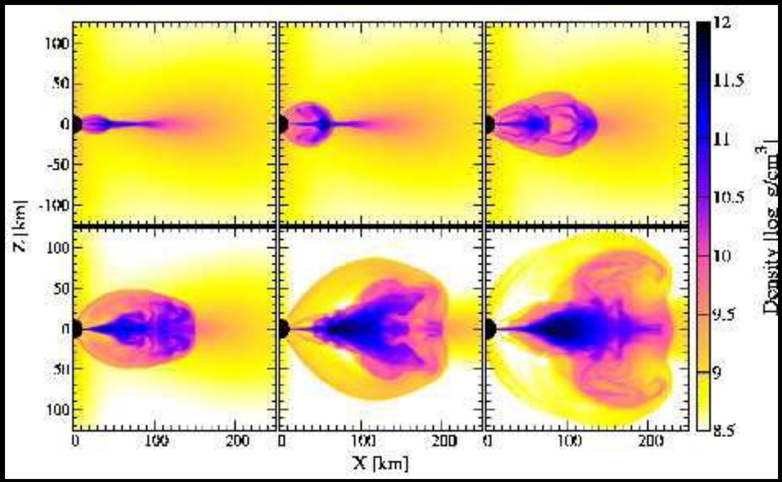
⇒ブラックホール周りの時空での構造を決める
一般相対論的流体計算
⇒ニュートリノ加熱率
マルチアングル（フルの）ニュートリノ輻射輸送

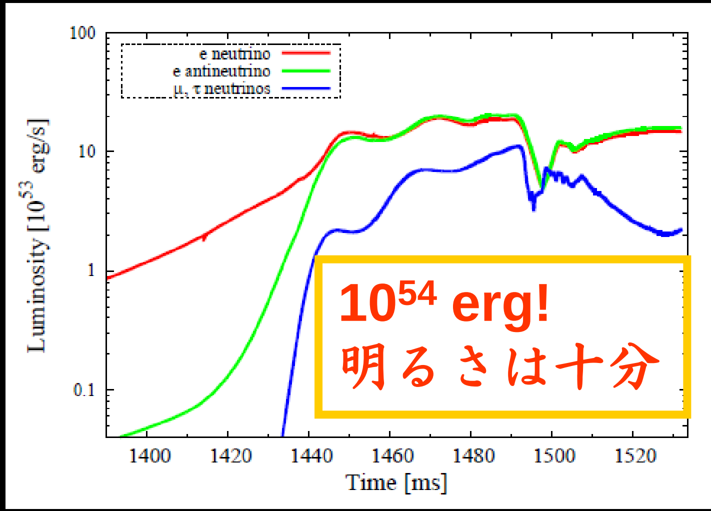
最近の結果

✓フルの一般相対論的計算＋ニュートリノ漏れ出し法

Sekiguchi & Shibata(2011)

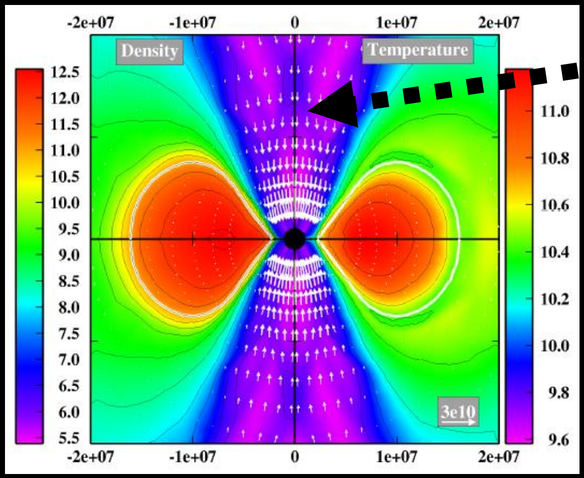
重力崩壊⇒ブラックホール形成⇒降着円盤の成長





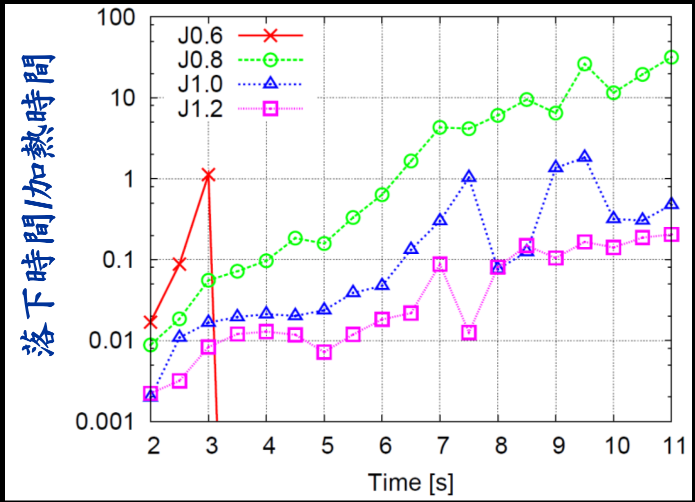
✓特殊相対論計算＋Ray-tracing ニュートリノ加熱

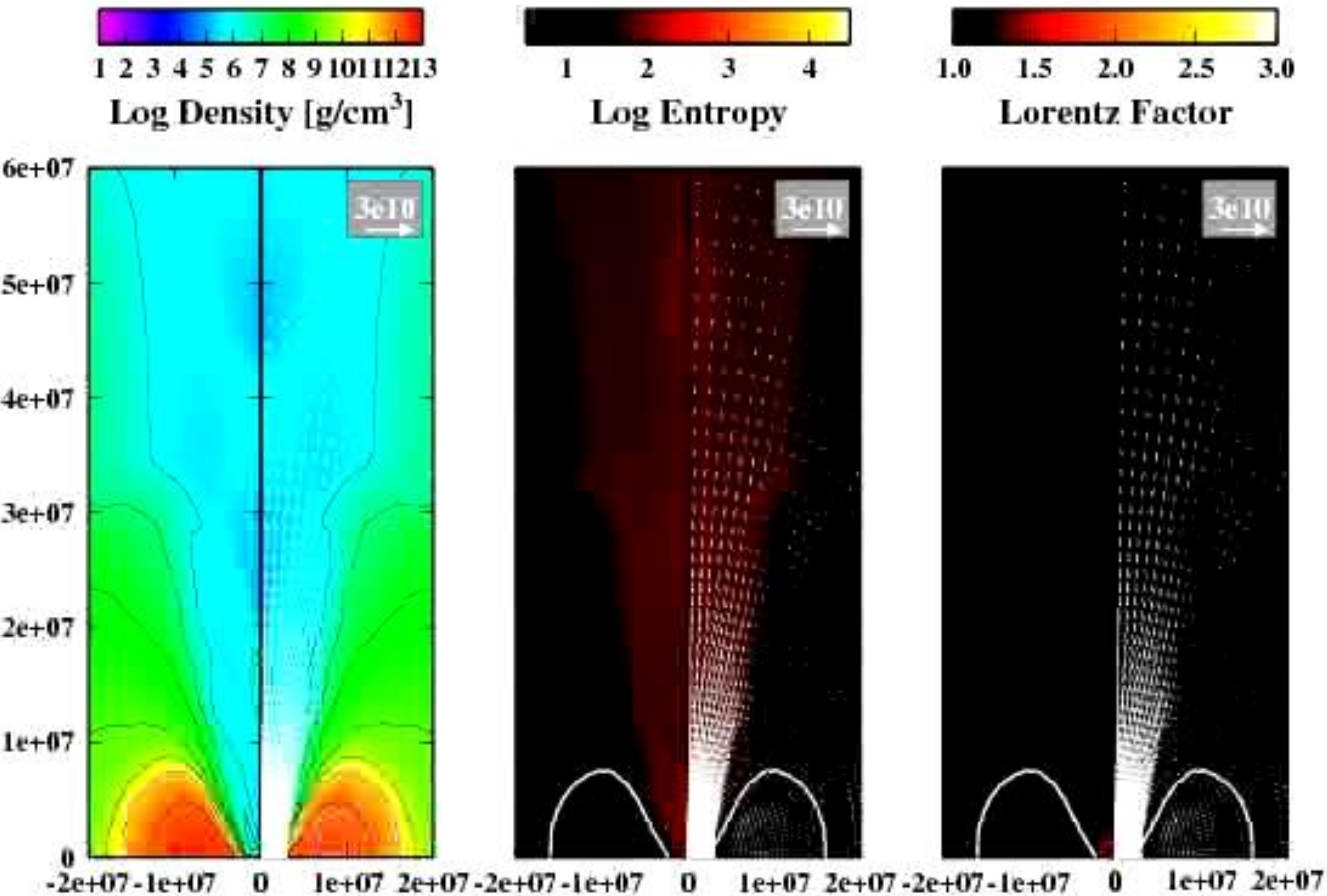
Harikae et al. (2010)



落下時間

$$\tau \sim (G\bar{\rho})^{-1/2}$$




Log Density [g/cm^3]
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13
Log Entropy
1 2 3 4
Lorentz Factor
1.0 1.5 2.0 2.5 3.0
3e10
6e+07
5e+07
4e+07
3e+07
2e+07
1e+07
0
-2e+07 -1e+07 0 1e+07 2e+07

磁場駆動ガンマ線バースト

エネルギー源：ブラックホールの回転エネルギー

Blandford-Znajek process **(MNRAS,179,433,1977)**

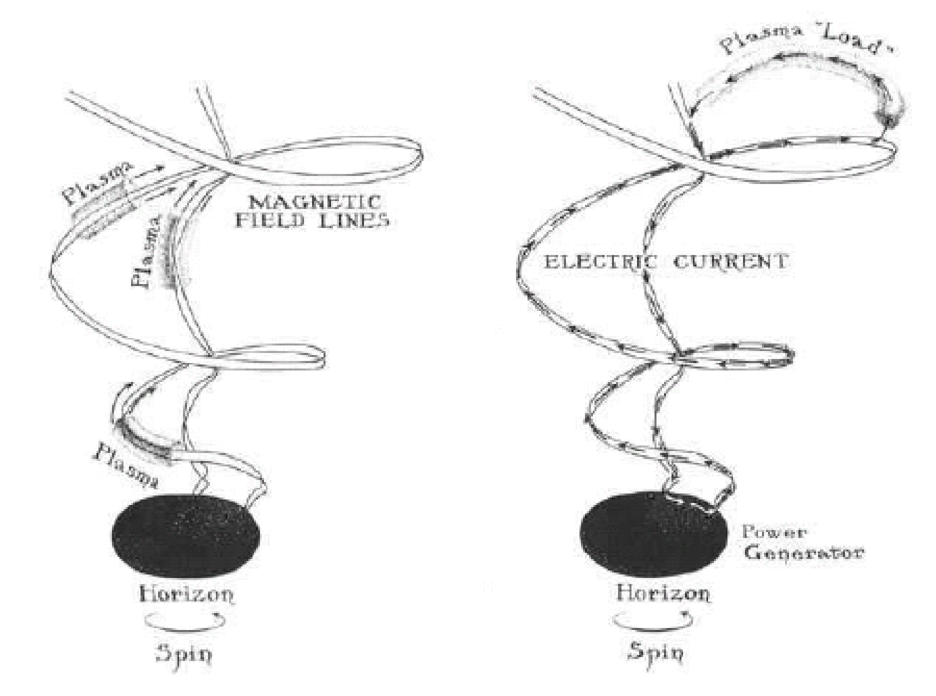


FIG. 4: Illustration of the Blandford-Znajek Process and circuit analogue. Taken from [6].

(Thorne, Membrane パラダイムより)

Kerr BHから引き抜ける回転エネルギー

$$E_{rot} = Mc^2 - M_{irr}c^2$$

$$E_{rot} = f(\tilde{a})Mc^2$$

$$f(\tilde{a}) = 1 - \sqrt{\frac{1}{2}[1+\sqrt{1-\tilde{a}^2}]}$$

$$\tilde{a} = \frac{Jc}{M^2G}$$ 無次元Kerr parameter

$\tilde{a} = 1$ Maximally rotating Kerr BH
（Schwarzshild半径を光速で回転する場合）

$$E_{BZ} = 1.8 \times 10^{54}\epsilon_\Omega f(\tilde{a}) \ (\frac{M}{M_\odot})erg$$

BZ processの継続時間

$$\tau_{BZ} \sim \frac{Mc^2}{B^2R^2c} \sim \frac{Mc^5}{B^2M^2G^2}$$
$$= \frac{c^5}{B^2MG^2} = 2.7 \times 10^3(\frac{10^{15}gauss}{B})^2(\frac{M_\odot}{M})s$$

回転しているBHの時空:Kerr　時空と　BZプロセス

$$ds^2 = -\alpha^2 dt^2 + g_{ij}(dx^i + \beta^i dt)(dx^j + \beta^j dt).$$

H.K. Lee et al, astroph/9906213

Boyer-Lindquist 座標

$$ds^2 = -\frac{\Delta - a^2\sin^2\theta}{\Sigma}dt^2 - \frac{4aGMr\sin^2\theta}{\Sigma}dtd\phi + \frac{\Sigma}{\Delta}dr^2 + \Sigma d\theta^2 + \frac{(r^2+a^2)^2 + a^2\Delta\sin^2\theta}{\Sigma}\sin^2\theta d\phi^2$$

$$\Sigma = r^2 + a^2\cos^2\theta$$

$$\Delta = r^2 - 2GMr + a^2$$

Kerr parameter

$$a \equiv \frac{J}{M}$$

BHの角運動量Jと質量Mの比

Event horizon:

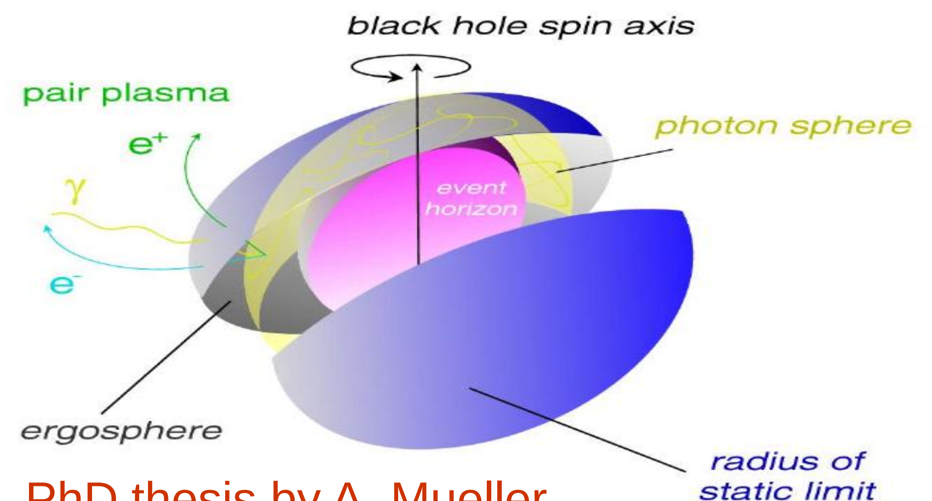
$\Delta = 0$ となる条件から

$$r_+ = M + \sqrt{M^2 - a^2}$$

Ergosphere: $\Delta - a^2\sin^2\theta$ = 0の条件から

$$r_0 = M + \sqrt{M^2 - a^2\cos^2\theta}$$

$r_+ < r < r_0$ では、non-static observer.
Frame-dragging とよぶ



PhD thesis by A. Mueller

Blandford-Znajek process のOrder評価

・Kerr BH の表面積

$$A_H = 4\pi(r_H^2 + a^2)$$

from

$$dS_i = \sqrt{det(g_{ij})}\epsilon_{ijk}\frac{\partial x^j}{\partial b}\frac{\partial x^k}{\partial c}db\,dc$$

・Kerr BH のentropy(面積定理）

$$\begin{aligned} S_H &= \frac{k_B}{4\hbar}A_H \\ &= \frac{\pi k_B}{\hbar}(r_H^2 + a^2) = \frac{2\pi k_B}{\hbar}Mr_H. \end{aligned}$$

・Kerr BH のirreducible mass

$$M_{irr} = \sqrt{\frac{A_H}{16\pi}} = \frac{1}{2}\sqrt{r_H^2 + a^2} = \sqrt{\frac{S_H}{4\pi}}$$

・Kerr BH の全質量

$$M = \sqrt{\frac{S_H}{4\pi} + \frac{J^2}{S_H}} = \sqrt{M_{irr}^2 + \frac{J^2}{4M_{irr}^2}}$$

・Kerr BHから引き抜ける回転エネ

$$E_{rot} = Mc^2 - M_{irr}c^2$$

$$\begin{aligned} E_{rot} &= f(\tilde{a})Mc^2 \\ f(\tilde{a}) &= 1 - \sqrt{\frac{1}{2}[1 + \sqrt{1 - \tilde{a}^2}]} \end{aligned}$$

$$\boxed{\tilde{a} = \frac{Jc}{M^2G}}$$ 無次元Kerr parameter

$\tilde{a} = 1$ Maximally rotating Kerr BH
（Schwarzshild半径を光速で
回転する場合）

・**BZで引き抜ける回転エネは**

$\epsilon_\Omega = \frac{\Omega_F}{\Omega_H}$ のefficiencyがかかる。

$$\boxed{E_{BZ} = 1.8 \times 10^{54}\epsilon_\Omega f(\tilde{a}) \quad (\frac{M}{M_\odot})erg}$$

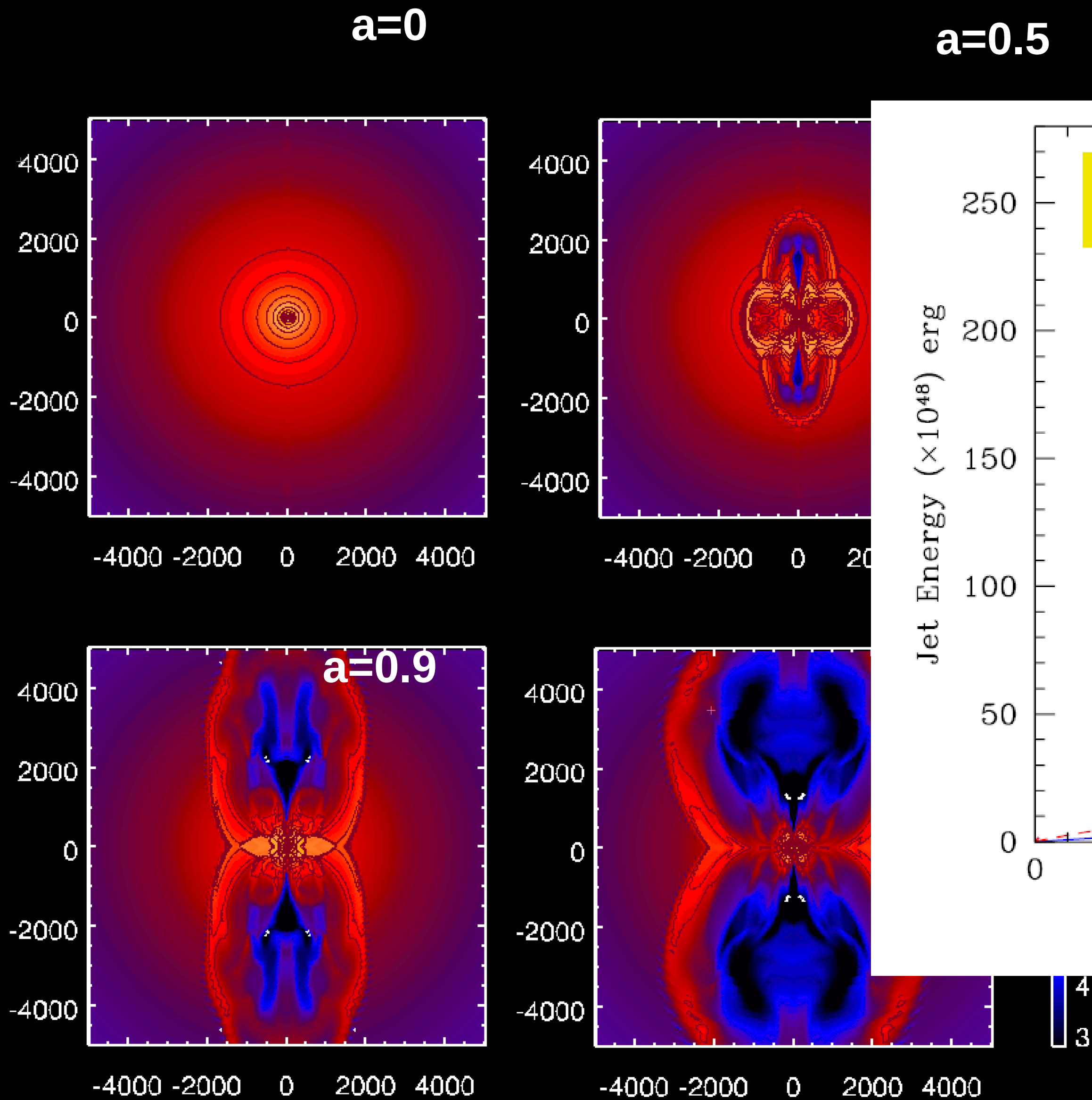
BZ processの継続時間

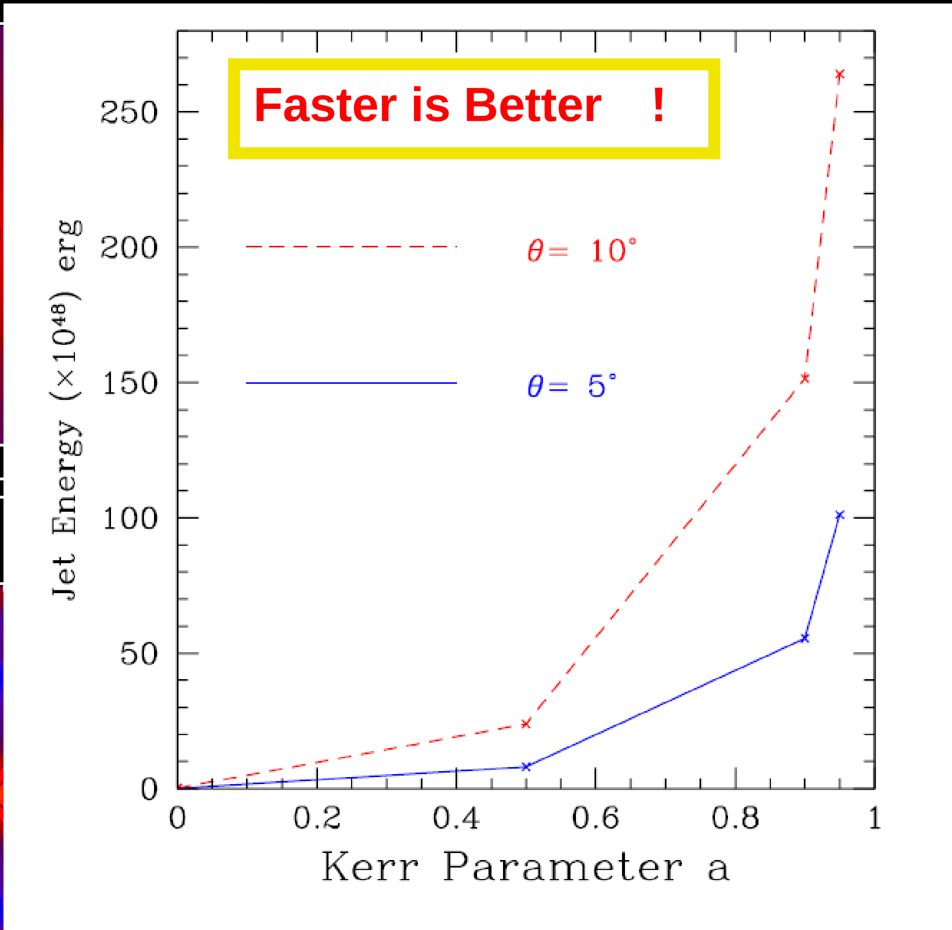
$$\boxed{\begin{aligned} \tau_{BZ} &\sim \frac{Mc^2}{B^2R^2c} \sim \frac{Mc^5}{B^2M^2G^2} \\ &= \frac{c^5}{B^2MG^2} = 2.7 \times 10^3(\frac{10^{15}gauss}{B})^2(\frac{M_\odot}{M})s \end{aligned}}$$

Recent simulations of BZ processes

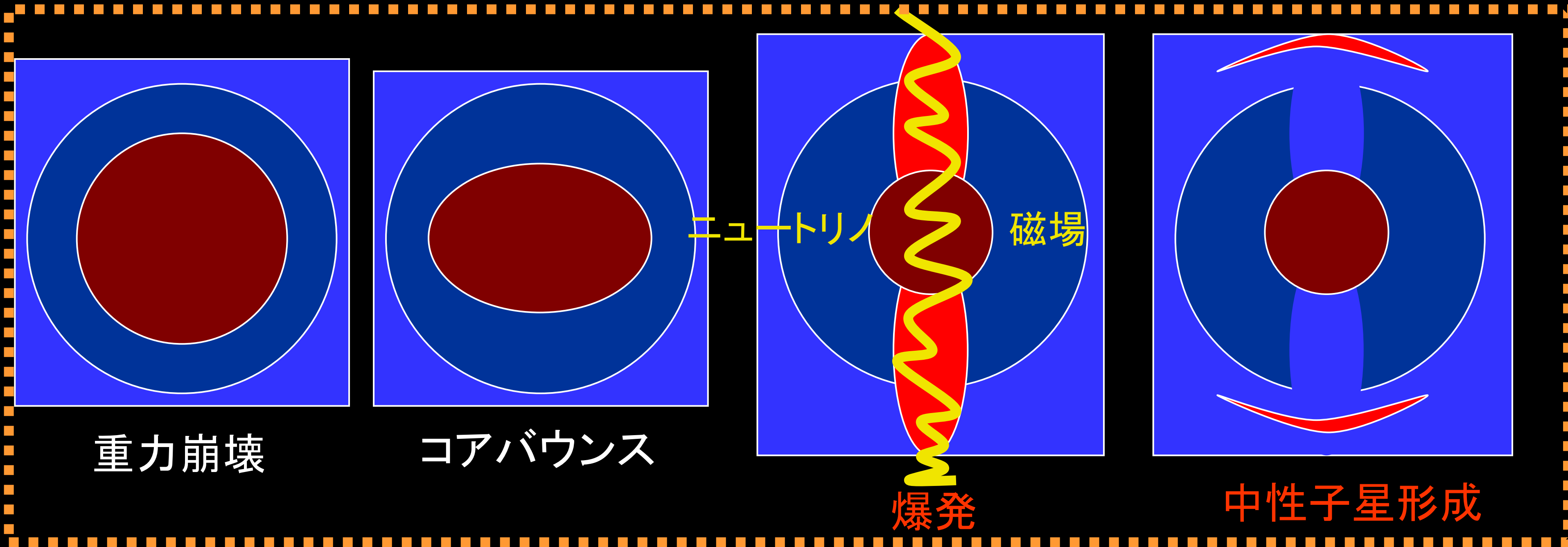
Nagataki (2010,2011)

✓ **2D GRMHD (fixed metric)**





まとめ



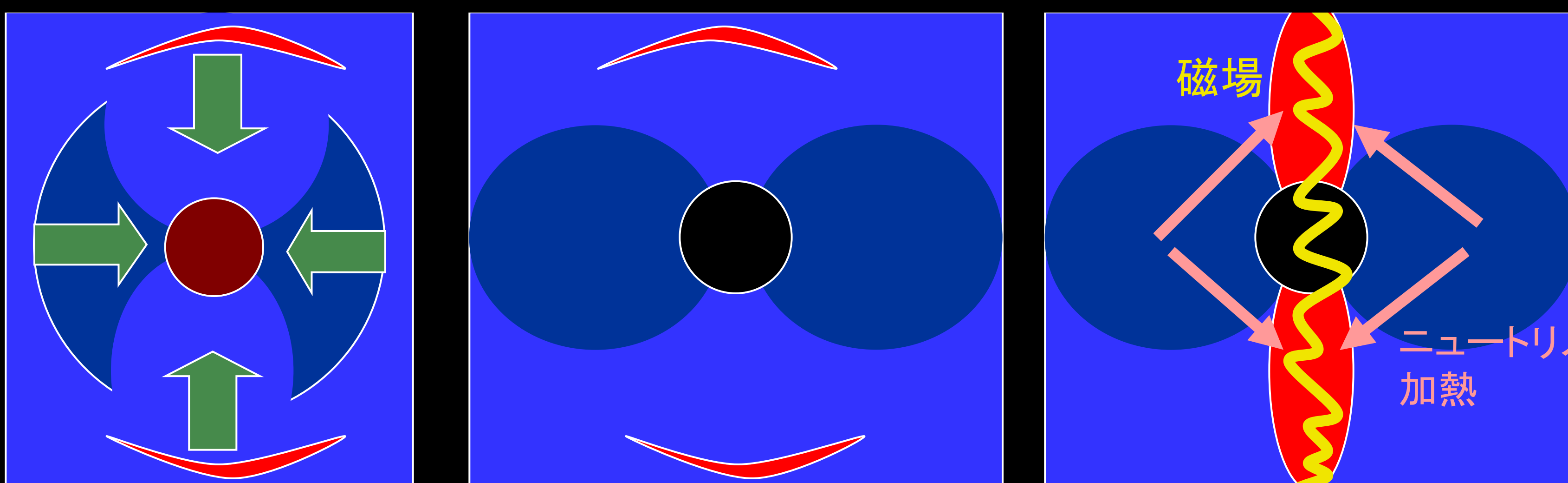
恒星進化論の最終段階を統一的に理解すること

数値シミュレーションで連続的に再現することが不可欠。
今後、高エネルギー数値天文学のグランドチャレンジ

時間発展

ブラックホール形成のダイナミクス

極超新星のメカニズム
γ線バーストの形成



フォールバック　降着円盤、ブラックホール形成　極超新星→γ線バースト

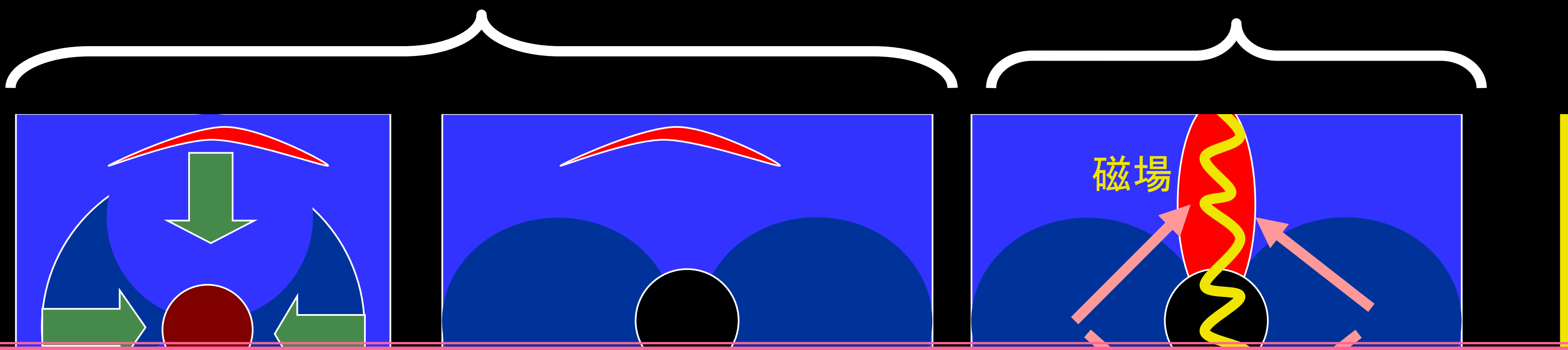
恒星進化論の最終段階を統一的に理解すること

数値シミュレーションで連続的に再現することが不可欠。
今後、高エネルギー数値天文学のグランドチャレンジ

時間発展

ブラックホール形成のダイナミクス

極超新星のメカニズム
γ線バーストの形成



✓「ニュートリノ輸送」+「一般相対論」シミュレーションが必要
✓ 現在、それぞれのフェイズに特化した計算が進んでいる
✓ 今後よりコンシステントな計算へ移行しつつある
✓ 少なくともExa-scaleの計算資源が必要！