

# 非専門家向けの格子QCD入門

—数値シミュレーションを中心として—

青木 慎也

筑波大学 数理物質科学研究科

第2回素核宇宙融合レクチャーシリーズ

2010年12月15、16日、京都大学基礎物理学研究所

## Part I: 格子QCDの理論的基礎

1. 宇宙、原子核、素粒子
2. 量子色力学(QCD)
3. 格子上のスカラー場の理論
4. 格子上のゲージ理論
5. 格子フェルミオン
6. ゲージ理論の観測量と強結合展開
7. 連続極限

## Part II. モンテカルロ法によるハドロン質量の計算

8. 経路積分表示

9. ゲージ配位の生成法

10. クォーク伝搬関数の計算

11. データの解析方法

12. 最新の結果

Part I.

格子QCDの理論的基礎

# 1. 宇宙、原子核、素粒子

宇宙物理：（主に）古典物理

ニュートン重力、一般相対論、電磁気学、流体力学

原子核物理：（主に）量子力学

シュレディンガー方程式

素粒子物理：（主に）場の量子論

QED, QCD, Weinberg-Salam model、量子重力？

古典力学：微分方程式（ニュートン/アインシュタイン方程式）を解く

$$H = \sum_i \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m_i} + \sum_{i \neq j} V(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \quad \text{ハミルトン-ヤコビ方程式}$$

↓

$$[\hat{x}_j, \hat{p}_k] = i\hbar\delta_{jk} \quad \text{“量子化”} \quad \longrightarrow \quad \hat{p}_j = i\hbar \frac{\partial}{\partial x_j}$$

$$H = - \sum_i \frac{\hbar^2}{2m_i} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}_i^2} + \sum_{i \neq j} V(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)$$

量子力学：微分方程式（シュレディンガー方程式）を解く

$$H\psi(\{\mathbf{x}_i\}) = E\psi(\{\mathbf{x}_i\})$$

場の量子論：（非可算）無限自由度の量子力学、相対論的

$$x_i(t) \longleftrightarrow \psi(\mathbf{x}, t) \quad [\psi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{y}, t)] = i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

# 演算子形式 vs. 経路積分 (量子力学)

演算子形式

$$[\hat{x}_j, \hat{p}_k] = i\hbar\delta_{jk}$$

$$H\psi(\{\mathbf{x}_i\}) = E\psi(\{\mathbf{x}_i\})$$



等価

経路積分(path-integral)

粒子が時刻  $t_I$  で  $\mathbf{x}_I$  から出発し、  
時刻  $t_F$  で  $\mathbf{x}_F$  に到着する振幅

$$\langle \mathbf{x}_F, t_F | \mathbf{x}_I, t_I \rangle = \sum_{\{\mathbf{x}(t) | \mathbf{x}(t_I) = \mathbf{x}_I, \mathbf{x}(t_F) = \mathbf{x}_F\}}^{\text{all path}} \exp \left[ i \frac{S(\mathbf{x}(t))}{\hbar} \right]$$

$$S(\mathbf{x}(t)) = \int_{t_I}^{t_F} dt L(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t))$$

action

Lagrangian

$$L = \sum_i \frac{m_i}{2} \dot{\mathbf{x}}_i^2 - \sum_{i \neq j} V(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)$$

$$\langle \mathbf{x}_F, t_F | \mathbf{x}_I, t_I \rangle = \int_{\mathbf{x}(t_I) = \mathbf{x}_I}^{\mathbf{x}(t_F) = \mathbf{x}_F} \mathcal{D}\mathbf{x}(t) \exp \left[ i \int_{t_I}^{t_F} dt L(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) / \hbar \right]$$

経路積分(path-integral)表示

# 場の量子論の経路積分 (結果のみ)

スカラー場

$$\langle 0 | \hat{\varphi}(x_1) \hat{\varphi}(x_2) \cdots \hat{\varphi}(x_n) | 0 \rangle = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}\varphi \varphi(x_1) \varphi(x_2) \cdots \varphi(x_n) e^{iS(\varphi)}$$

n点関数 (真空期待値)

$$Z = \int \mathcal{D}\varphi e^{iS(\varphi)} \quad S = \int d^4x \mathcal{L}(\varphi(x))$$

どうやって計算するか?

Lagrangian 密度

自由場 (相互作用無し) では計算できる。  $S = \varphi(x) D(x, y) \varphi(y)$   $x, y$  積分

生成 (汎) 関数 (ユークリッド空間)  $D(x, y) = (-\partial_\mu \partial^\mu + m^2)_x \delta^{(4)}(x - y)$

$$Z(J) = \int \mathcal{D}\varphi e^{-\frac{1}{2} \varphi \cdot D \cdot \varphi + J \cdot \varphi} = (\det D)^{-1/2} e^{J \cdot D^{-1} \cdot J} \quad \text{ガウス積分の一般化}$$

例: 2点関数(propagator)

—————> n点は2点の組み合わせで計算できる

$$\langle \varphi(x) \varphi(y) \rangle_c = \frac{\partial^2}{\partial J(x) \partial J(y)} \log Z(J) \Big|_{J=0} = D^{-1}(x, y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik(x-y)}}{k^2 + m^2}$$

propagatorの極が粒子の分散関係を与える  $E^2 = \mathbf{k}^2 + m^2$

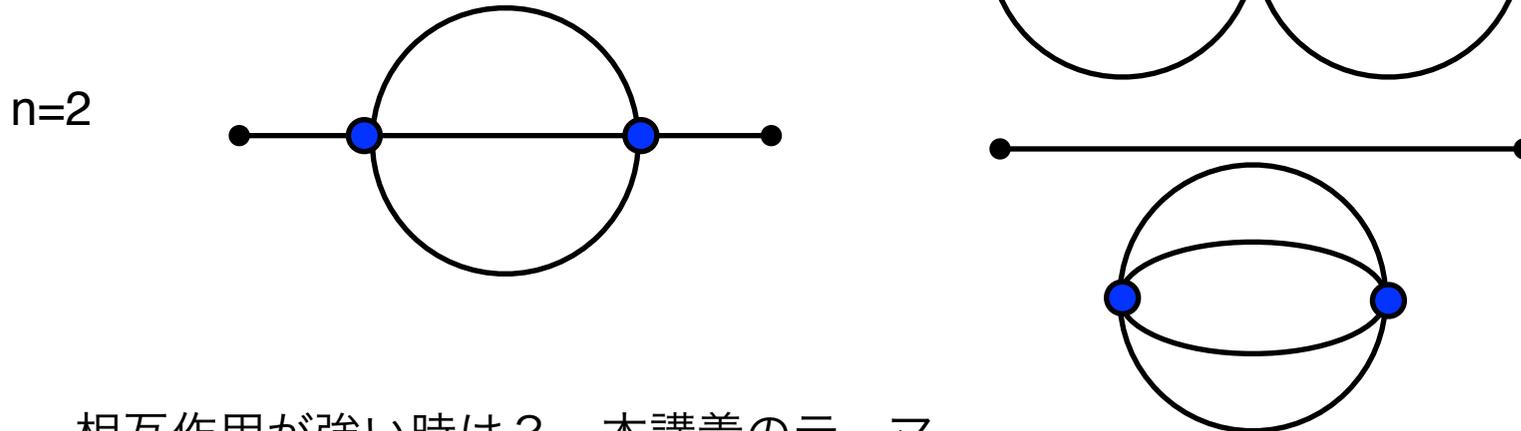
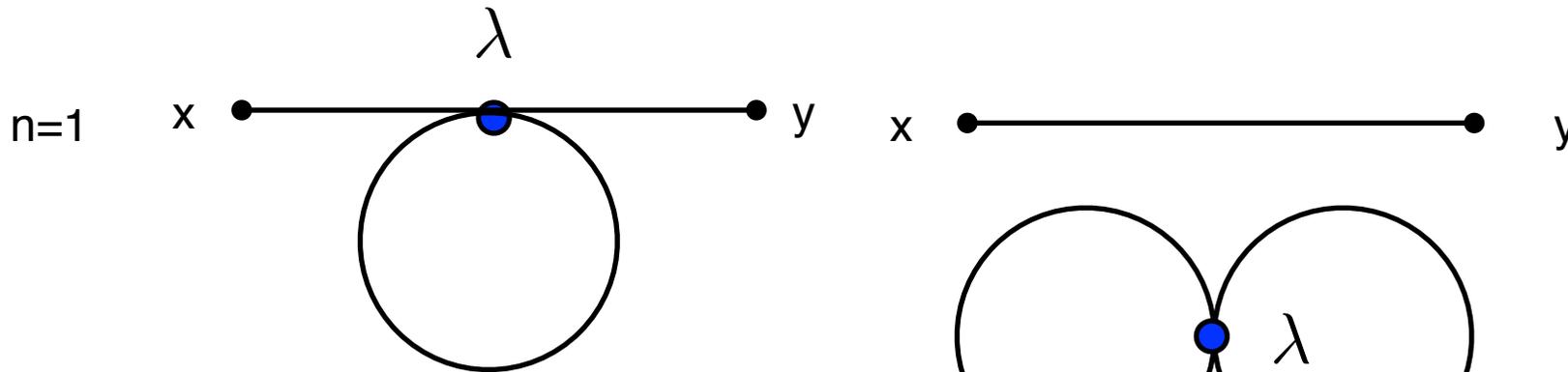
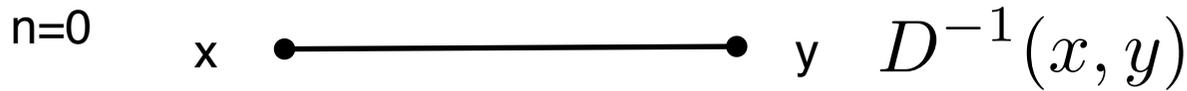
# 相互作用がある場合の計算法

$$V(x) = \lambda \varphi^4(x)$$

$$Z_\lambda(J) = \int \mathcal{D}\varphi e^{-\frac{1}{2}\varphi \cdot D \cdot \varphi + J \cdot \varphi + \int d^4x V(x)} = \int \mathcal{D}\varphi e^{-\frac{1}{2}\varphi \cdot D \cdot \varphi + J \cdot \varphi} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \int d^4x V(x) \right\}^n$$

摂動展開 (相互作用が弱いとき)

例：2点関数



more

相互作用が強い時は？ 本講義のテーマ

# 2. Quantum Chromo Dynamics (QCD)

SU(3) ゲージ理論 with 基本表現のクォーク

$$L = \sum_f \bar{\psi}_f (i\gamma^\mu D_\mu - m_f) \psi_f - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

$$D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu$$

共変微分

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu]$$

場の強さ

$$A_\mu = A_\mu^a T_a \quad \text{SU(3) generator} \quad \text{ゲージ場}$$

$\psi_f^A$  ( $A = 1, 2, 3, f = u, d, s, c, b, t$ ): quarks in the fundamental rep.

クォーク (フェルミオン)

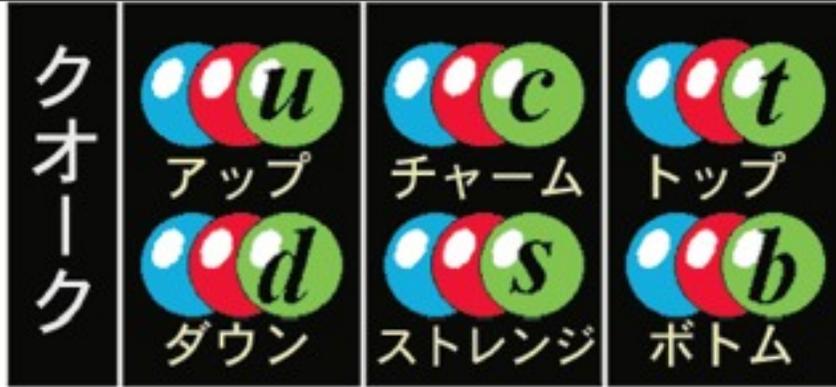
ゲージ変換

$$\psi \rightarrow U\psi, \quad A_\mu \rightarrow UA_\mu U^\dagger + \frac{1}{ig} \partial_\mu U \cdot U^\dagger$$

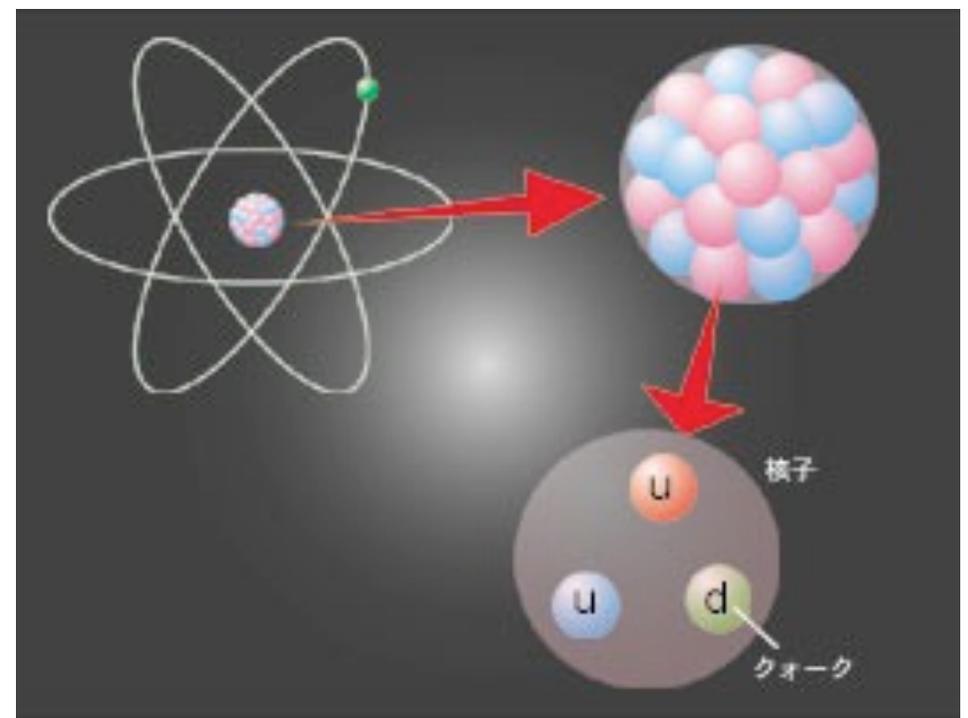
$$U(x) \in \text{SU}(3)$$

$$D_\mu \rightarrow UD_\mu U^\dagger, \quad F_{\mu\nu} \rightarrow UF_{\mu\nu} U^\dagger$$

$$F_{\mu\nu} \equiv \frac{i}{g} [D_\mu, D_\nu]$$



例:陽子 ( $uud$ ), 中性子 ( $udd$ )  
 $\pi$ 中間子 ( $u\bar{u}, d\bar{d}, u\bar{d}, d\bar{u}$ )

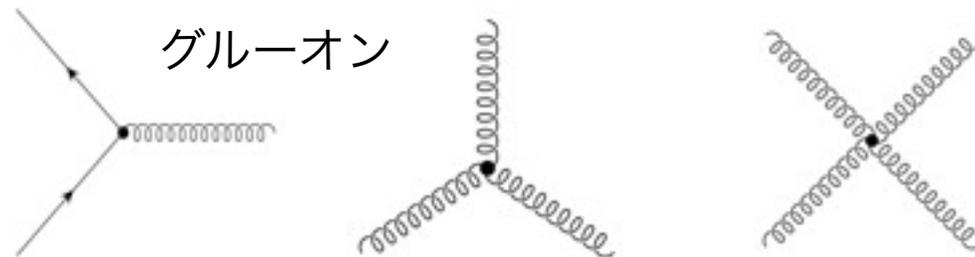


$10^{-13}$  cm

## QCD

クォークとそれを結びつける  
 糊粒子(グルーオン)の力学

クォーク



グルーオン

反クォーク

2008年のノーベル物理学賞  
 南部陽一郎博士が提唱(1965)

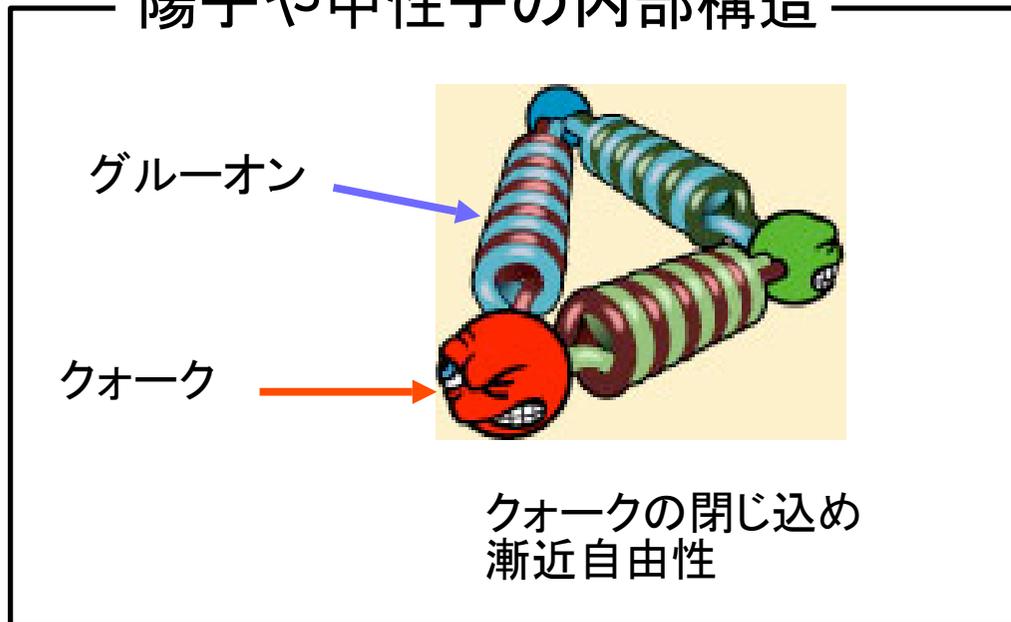


# 性質

- 相互作用はクォークの種類に依らない (ゲージ相互作用の普遍性)
- 近距離 / 高エネルギーで相互作用は弱くなる (漸近的自由性)
- 遠距離 / 低エネルギーでは相互作用が強くなる (クォークの閉じ込めを説明?)
- ゲージ不変なカラー 1 重項のみが粒子として存在

meson ( $\bar{q}q$ ), baryon ( $qqq$ )

## 陽子や中性子の内部構造



## 漸近自由性の発見



グロス博士 ポリツァー博士 ウイルチェック博士

(2004年ノーベル物理学賞)

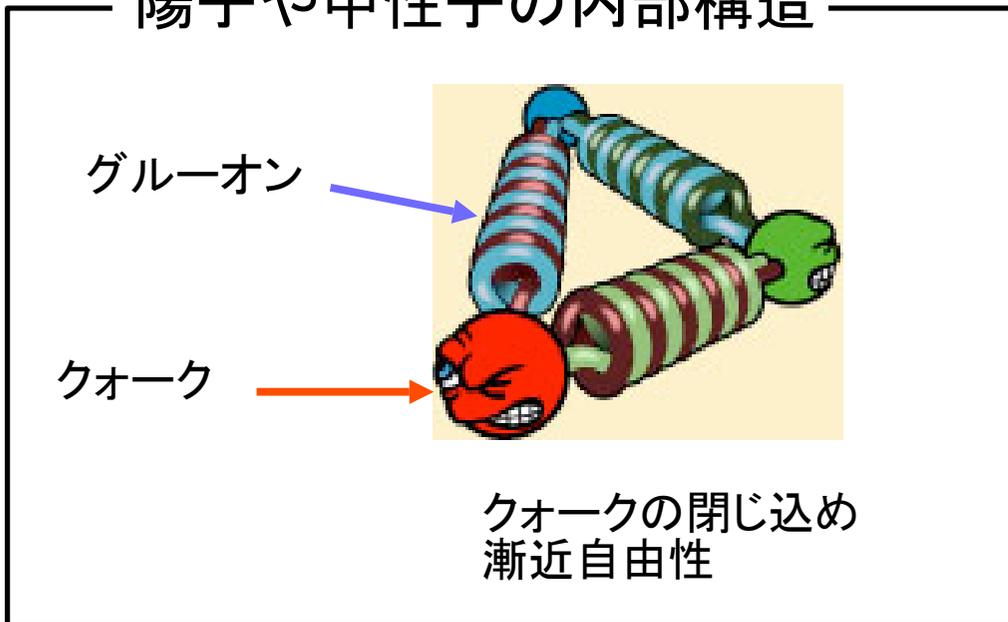
QCDを使ってどのように物理量を計算すれば良いか？

# 性質

- 相互作用はクォークの種類に依らない (ゲージ相互作用の普遍性)
- 近距離 / 高エネルギーで相互作用は弱くなる (漸近的自由性)
- 遠距離 / 低エネルギーでは相互作用が強くなる (クォークの閉じ込めを説明?)
- ゲージ不変なカラー 1 重項のみが粒子として存在

meson ( $\bar{q}q$ ), baryon ( $qqq$ )

## 陽子や中性子の内部構造



## 漸近自由性の発見



グロス博士 ポリツァー博士 ウィルチェック博士

(2004年ノーベル物理学賞)

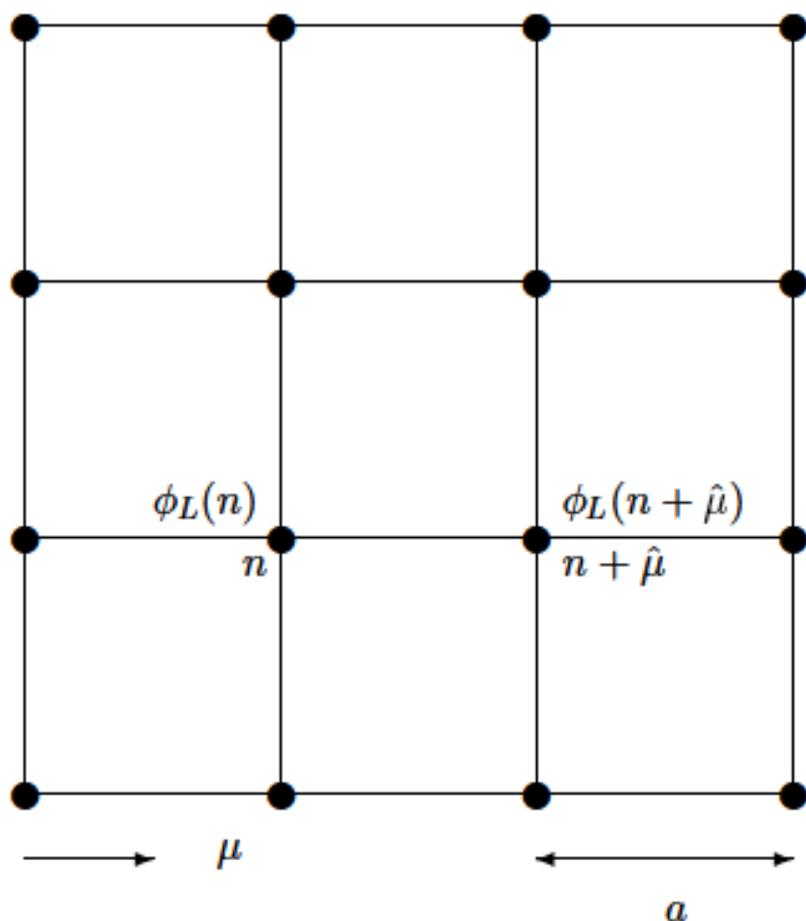
QCDを使ってどのように物理量を計算すれば良いか？

# 3. 格子上的スカラー場の理論

例：4点相互作用するスカラー場  $S = \int d^4x \left[ \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi(x) + \frac{m^2}{2} \phi^2(x) + \frac{\lambda}{4!} \phi^4(x) \right]$

計算したいものは (非常に複雑な経路) 積分  $\int \mathcal{D}\phi e^{-S(\phi) + J \cdot \phi}$

”区分”求積：空間を格子に分ける



$$\phi(x) \rightarrow \phi(na)$$

$$n = (n_1, n_2, \dots, n_D)$$

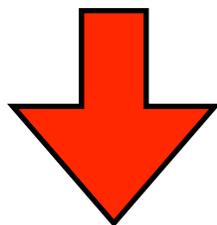
微分  $\rightarrow$  (対称) 差分

$$\partial_\mu \phi(x) \rightarrow$$

$$\frac{\phi((n + \hat{\mu})a) - \phi((n - \hat{\mu})a)}{2a}$$

$$S_{\text{lat}} = a^4 \sum_n \left[ -\frac{1}{2} \phi(na) \sum_{\mu} \frac{\phi(na + \mu a) + \phi(na - \mu a) - 2\phi(na)}{a^2} + \frac{m^2}{2} \phi(na)^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi(na)^4 \right]$$

$$x = na = (n_1, n_2, n_3, n_4)a$$



無次元化した場、パラメタ (計算機に載る!)

$\phi_L(n) \equiv a\phi(na)$  and  $M = ma$  (dimensionless)

$$S_{\text{lat}} = \sum_n \left[ -\frac{1}{2} \phi_L(n) \sum_{\mu} \{ \phi_L(n + \mu) + \phi_L(n - \mu) - 2\phi_L(n) \} + \frac{M^2}{2} \phi_L(n)^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi_L(n)^4 \right]$$

hopping term (隣との"揃いやすさ")

$$Z(J) = \int \prod_n d\phi(n) \exp \left[ \sum_{n,\mu} \overline{\phi(n)\phi(n+\mu)} - \sum_n V_J(\phi(n)) \right]$$

$$V_J(\phi(n)) = \frac{M^2 + 2d}{2} \phi^2(n) + \frac{\lambda}{4!} \phi^4(n) - J(n)\phi(n)$$

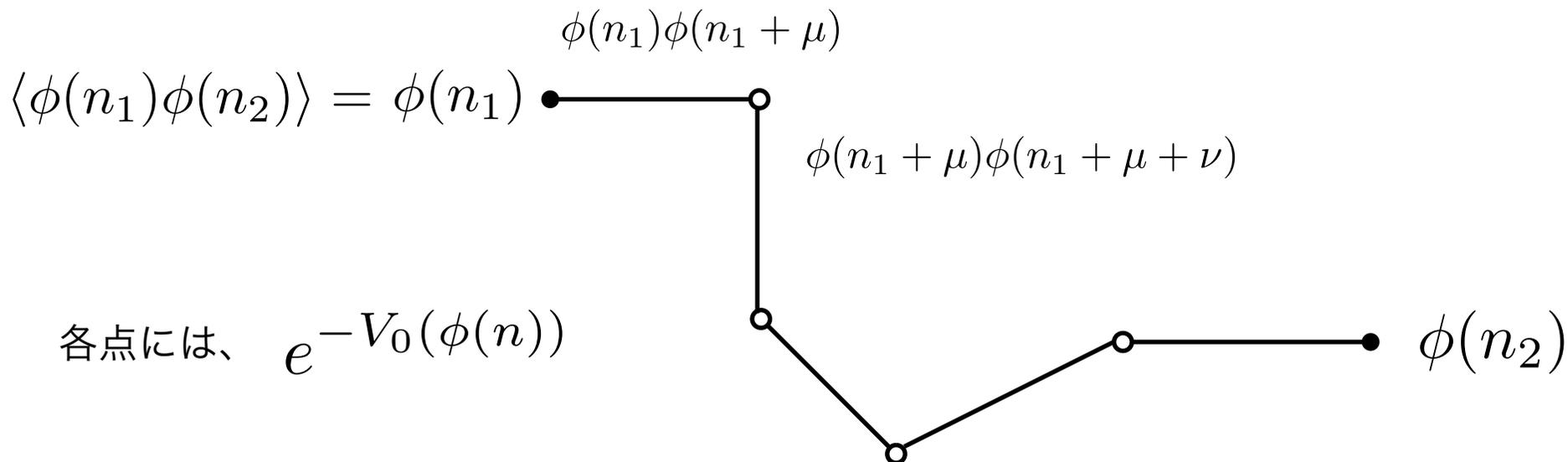
もし、hopping termが無ければ、積分は簡単。

hopping termが (相対的に) 小さい $\leftrightarrow$ 質量が大きい。 (高温) 展開

質量が重いと

動きにくい

例：2点相関関数



例えば、交わりのない1つの経路からの寄与は、

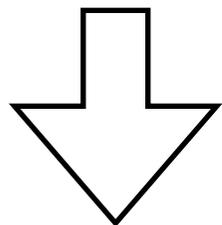
$(\langle \phi^2 \rangle_{V_0})^L$       L:経路の長さ (格子間隔単位で)

$$\langle \phi^2 \rangle_{V_0} = \frac{\int d\phi \phi^2 e^{-V_0(\phi)}}{\int d\phi e^{-V_0(\phi)}}$$

最終結果は、いろいろな経路の足し合わせ！

## 脇道：格子作用（差分）の改良

$$\nabla_{\mu}^2 \phi(na) \equiv \frac{\phi(na + \mu a) + \phi(na - \mu a) - 2\phi(na)}{a^2} = \partial_{\mu}^2 \phi + a^2 \frac{2}{4!} \partial_{\mu}^4 \phi + O(a^4)$$



$$\nabla_{\mu}^2 \phi - a^2 \frac{2}{4!} \nabla_{\mu}^4 \phi = \partial_{\mu}^2 \phi + O(a^4)$$

(古典的な) 作用の改良

ただし、hopping termの構造はより複雑になる。

$$a^4 \nabla_{\mu}^4 \phi(n) = \phi(n+2) - 4\phi(n+1) + 6\phi(n) - 4\phi(n-1) + \phi(n-2)$$

# 4. 格子上のゲージ理論

## 4.1 問題点

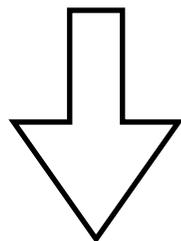
$$L = \bar{\psi} \gamma_{\mu} (\partial_{\mu} + ig A_{\mu}) \psi + \frac{1}{2} \text{Tr} F_{\mu\nu}^2$$

微分を差分化した時にゲージ不変をどのように保つか?  $\bar{\psi}(x) \psi(x + \Delta x)$

連続理論では、

$$\bar{\psi}(x) [1 + ig \Delta x^{\mu} A_{\mu}(x)] \psi(x + \Delta x) = \bar{\psi}(x) [\psi(x) + \Delta x^{\mu} (\partial_{\mu} + ig A_{\mu}) \psi(x)] + O(\Delta x^2)$$

finite  $\Delta x$



$$\bar{\psi}(x) \underbrace{P \exp\left[ig \int_x^{x+\Delta x} A_{\mu}(y) dy^{\mu}\right]}_{\equiv U(x, x+\Delta x)} \psi(x + \Delta x)$$

$$\delta x = \frac{\Delta x}{N}$$

path-ordered product  $P \exp\left[ig \int_x^{x+\Delta x} A_{\mu}(y) dy^{\mu}\right] = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=0}^{N-1} [1 + ig A_{\mu}(x + n\delta x) \delta x^{\mu}]$

## ゲージ変換性は？

$$\psi(x) \rightarrow \Omega(x)\psi(x), \quad \bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}(x)\Omega^\dagger(x) \quad \Omega(x) \in \text{SU}(3)$$

$$A_\mu(x) \rightarrow \frac{\Omega(x)\partial_\mu\Omega^\dagger(x)}{ig} + \Omega(x)A_\mu(x)\Omega^\dagger(x)$$

とすると、不変性から、あるいは具体的な計算から、

$$U(x, x + \Delta x) \rightarrow \Omega(x)U(x, x + \Delta x)\Omega^\dagger(x + \Delta x)$$

と、共変的に変換することが分かる。これをヒントに格子上のゲージ理論の構成を考える。

## 4.2 ゲージ場に対する格子作用

### リンク変数

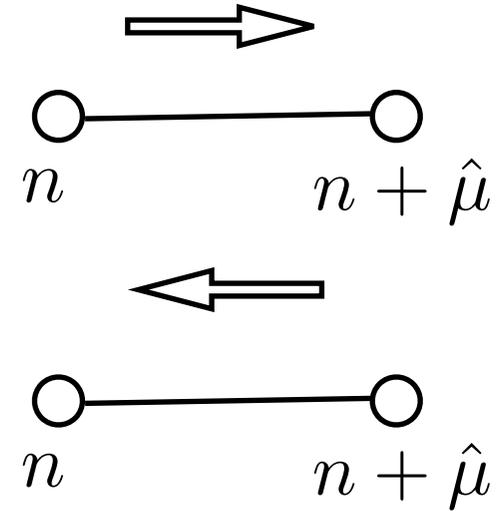
スカラー場は格子点に置いたが、ベクトル場であるゲージ場はリンクに置く。

$$U_{n,\mu} = \exp[igaA_\mu(n)] \in \text{SU}(N)$$

$g$ :結合定数

$$U_{n+\hat{\mu},-\mu} \equiv U_{n,\mu}^\dagger$$

逆向きはエルミート共役で定義



### ゲージ変換

$$U_{n,\mu} \rightarrow U_{n,\mu}^g = g_n U_{n,\mu} g_{n+\hat{\mu}}^\dagger$$

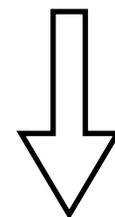
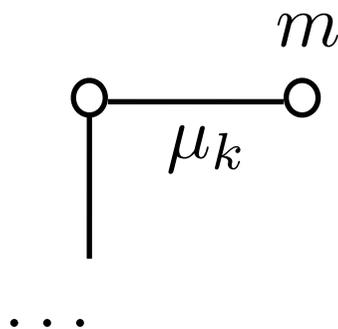
$$g_n \in \text{SU}(N)$$

変換は格子点上で定義

# ゲージ不変性

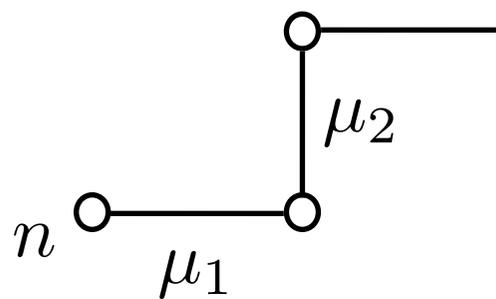
## 経路上のリンク変数の積

$$\prod U \equiv U_{n, \mu_1} U_{n+\hat{\mu}_1, \mu_2} \cdots U_{m-\hat{\mu}_k, \mu_k} \longrightarrow g_n \prod U g_m^\dagger$$



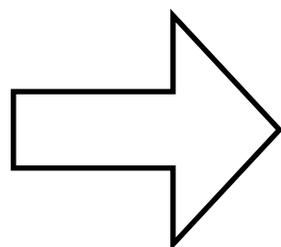
閉じた経路では

Closed loop  $C$  at  $n$



$$\prod_C U \rightarrow g_n \left\{ \prod_C U \right\} g_n^\dagger$$

traceを取ると



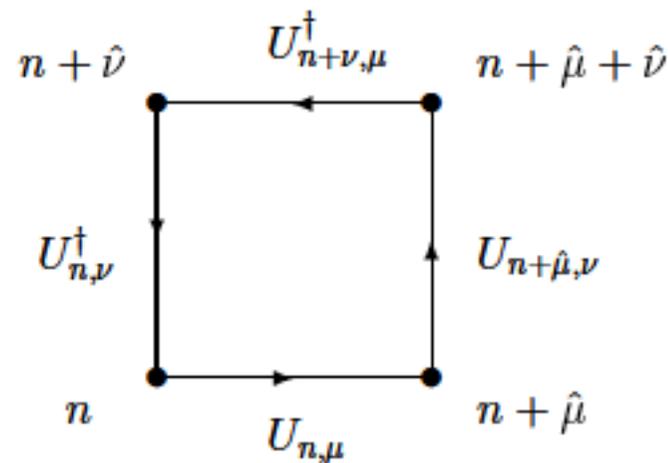
$$\text{tr} \left\{ \prod_C U \right\} \text{ is gauge invariant}$$

ゲージ場に対する作用は？

作用はゲージ不変であるべし

$$\Rightarrow S = \sum_n \sum_{\Gamma \in \text{closed loops}} \beta_{\Gamma} \text{tr } \mathcal{O}_{\Gamma}(n), \quad \mathcal{O}_{\Gamma} = \prod_{i \in \Gamma} U_i$$

もっとも簡単なループ (プラケット)



プラケット作用

$$S = \sum_{n, \mu \neq \nu} \beta \text{tr} \overbrace{U_{n,\mu} U_{n+\hat{\mu},\nu} U_{n+\hat{\nu},\mu}^\dagger U_{n,\nu}^\dagger}^{U_{\mu\nu}(n)} = \sum_{n, \mu < \nu} 2\beta \text{Re tr} [U_{\mu\nu}(n)]$$

## 本当にゲージ場の作用になっているか？

a → 0を取ってみる。

$$U_{n,\mu} = e^{iagA_\mu(n)} \quad \text{と置く。}$$

$$e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\dots} \quad \text{ハウスドルフの公式}$$

$$\begin{aligned} \text{tr } U_{\mu\nu}(n) &= \text{tr} \exp\left[iag\left\{A_\mu(n) + A_\nu(n + \hat{\mu}) + \frac{iag}{2}[A_\mu, A_\nu] + \dots\right\}\right] \\ &\quad \times \exp\left[-iag\left\{A_\mu(n + \hat{\nu}) + A_\nu(n) - \frac{iag}{2}[A_\mu, A_\nu] + \dots\right\}\right] \\ &= \text{tr} \exp\left\{iag\left[\underbrace{\{A_\nu(n + \hat{\mu}) - A_\nu(n)\} - \{A_\mu(n + \hat{\nu}) - A_\mu(n)\}}_{aF_{\mu\nu} + O(a^3)} + iag[A_\mu, A_\nu] + O(a^3)\right]\right\} \\ &= \text{tr} \left[ 1 + \underbrace{ia^2 g F_{\mu\nu}}_{\sim 0} + a^4 X_4 - \frac{a^4 g^2}{2} F_{\mu\nu}^2 + O(a^6) \right] \\ \lim_{a \rightarrow 0} S &= \sum_{n, \mu \neq \nu} \beta \text{tr} \left[ 1 - \frac{a^4 g^2}{2} F_{\mu\nu}^2 \right] \quad \text{確かに連続理論のゲージ場の作用に一致} \end{aligned}$$

## 経路積分の表式

$$Z = \int \prod_{n,\mu} dU_{n,\mu} e^{S_G} = \int \prod_{n,\mu} dU_{n,\mu} \exp \left[ \frac{1}{g^2} \sum_{n,\mu \neq \nu} \text{tr} U_{\mu\nu}(n) \right]$$

ただし  $dU$ : Haar measure

$$d(VU) = d(UV) = dU \quad (\forall V \in \text{SU}(N))$$

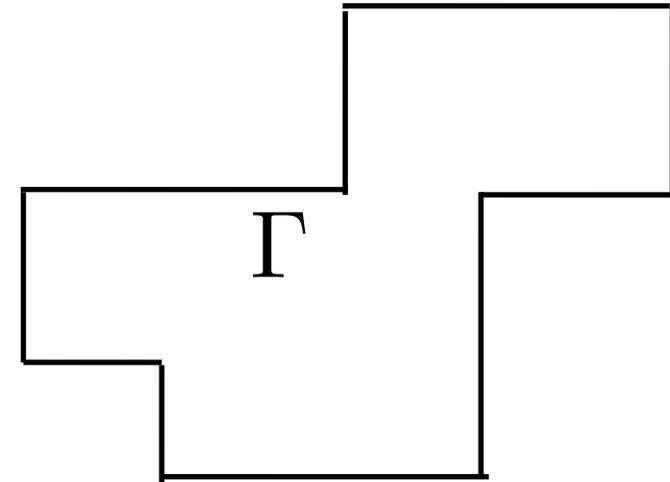
積分測度もゲージ不変

⇒  $\langle \text{Gauge non-invariant operator} \rangle = 0$

“局所ゲージ対称性は自発的に破れない” (エリツァーの定理)

Observables = gauge invariant quantities

= Functions of  $\text{tr } \mathcal{O}_\Gamma$  for a closed loop  $\Gamma$



# 5. 格子フェルミオン

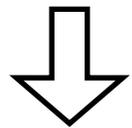
## 5.1 ダブリング問題

スカラー場のようにフェルミオンを格子点に置けば良いと思われていたが、実は、ゲージ場より難しいことが後から分かった。問題点の解決は最近。

$$S_F = \int d^4x \bar{\psi}(\gamma_\mu D_\mu + m)\psi$$

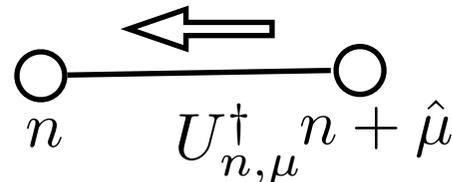
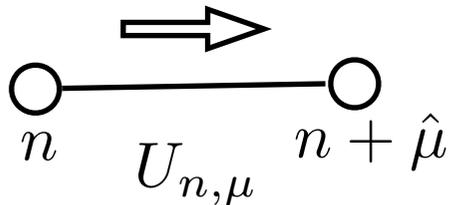
$$\Rightarrow S_F = a^4 \sum_n \bar{\psi}_n \left[ \sum_\mu \gamma_\mu \frac{U_{n,\mu} \psi_{n+\hat{\mu}} - U_{n-\hat{\mu},\mu}^\dagger \psi_{n-\hat{\mu}}}{2a} + m\psi_n \right]$$

単純に差分化



$$a^{3/2}\psi \rightarrow \psi, \quad ma = M \text{ (dimensionless)} \quad \text{無次元化}$$

$$S_F = \frac{1}{2} \sum_{n,\mu} [\bar{\psi}_n \gamma_\mu U_{n,\mu} \psi_{n+\hat{\mu}} - \bar{\psi}_{n+\hat{\mu}} U_{n,\mu}^\dagger \psi_n] + M \bar{\psi}_n \psi_n$$



hopping term

一見、これで良さそうだが。

一般のフェルミオン作用を考える。

$$S = \bar{\psi} \cdot D \cdot \psi$$

Dのゼロ点は、伝搬関数の極なので、”粒子”に対応する。

相互作用無し、ゼロ質量を運動量空間で考えると

連続理論

$$D = i\gamma_{\mu}p^{\mu}$$

ゼロ点は1つだけ

$$\forall p^{\mu} = 0$$

格子理論 (単純な差分)

$$D = \frac{i\gamma_{\mu} \sin(p^{\mu} a)}{a}$$

ゼロ点は複数

$$p^{\mu} = 0, \pi/a$$

4次元では16個のゼロ点、つまり、16個の粒子を記述  
(ダブラー)

ダブリング問題

この問題を解決するために、いろいろ試みられたが、うまく行かず、次の定理が示された。

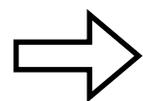
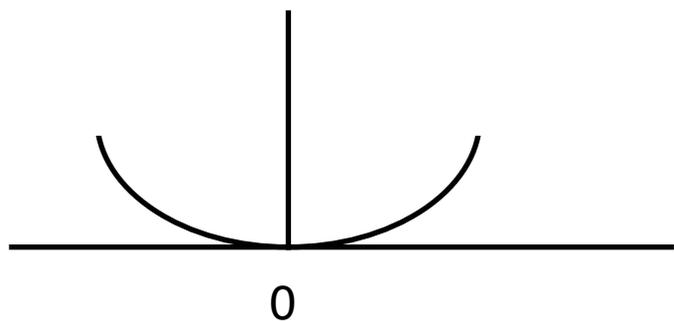
ニールセン・二宮の定理

適当な仮定 (平行移動不変性、カイラル対称性、局所性、エルミート性、双線形性) を満たす格子フェルミオンには、ダブリング問題が存在する

# フェルミオンとボソンの違い (運動量空間)

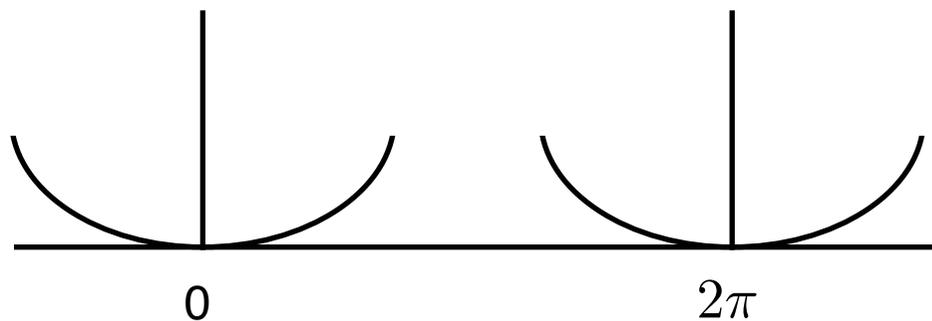
連続 (無限)

ボソン  $D \propto p^2$

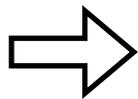
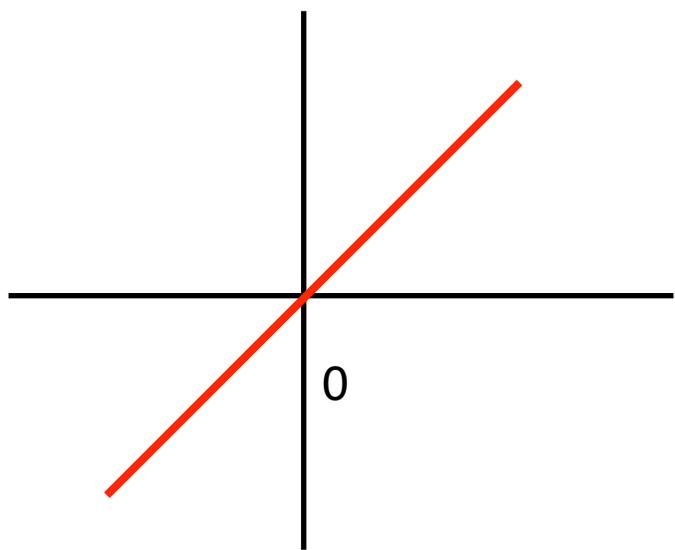


格子 (コンパクト、周期的)

余分なゼロはでない

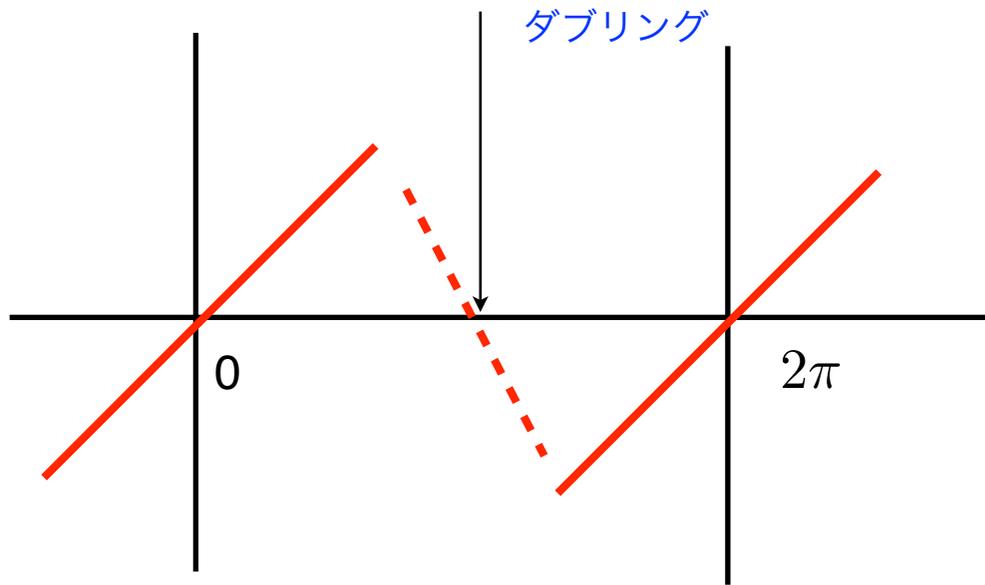


フェルミオン  $D \propto p$

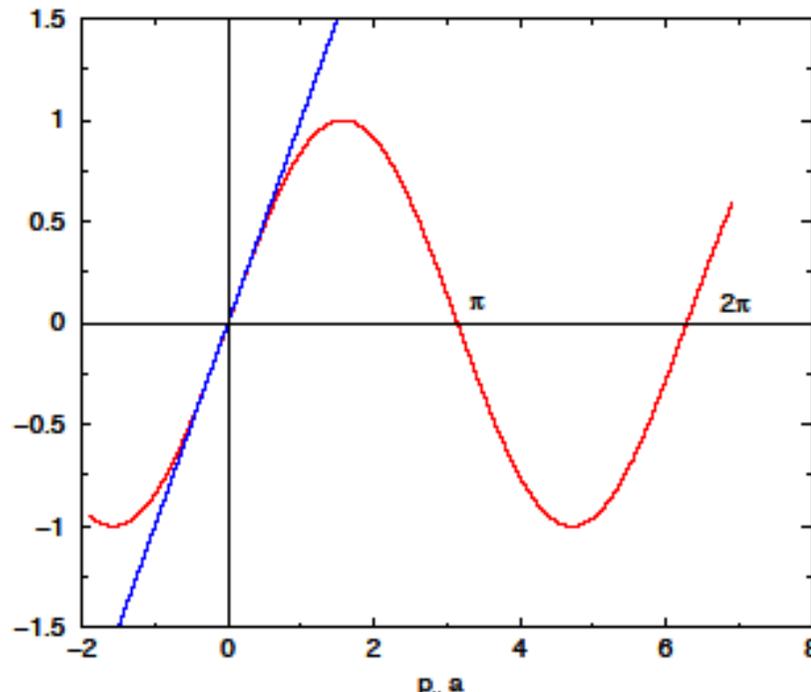


連続性から途中で余分なゼロが必要

ダブリング



単純な差分化では



カイラル対称性

格子上でこの対称性を保つことは重要

クォークがゼロ質量の場合にQCDが持つ対称性（右手系と左手系を別々に回転する対称性）

$$\begin{cases} \psi & \rightarrow \psi' = e^{i\theta\gamma_5} \psi \\ \bar{\psi} & \rightarrow \bar{\psi}' = \bar{\psi} e^{i\theta\gamma_5} \end{cases}$$

この対称性はQCDの力学で自発的に破れる。（南部）  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle \neq 0$

この時、ゼロ質量の粒子（南部・ゴールドストーン粒子）が出現＝ $\pi$ 中間子

実際はクォークは質量を持つので、  $m_\pi^2 = Am$  （PCAC関係式）

$\pi$ 中間子の質量が（他のハドロン）より小さいことの説明。

## 5.2 ダブリングの無い格子フェルミオン

単純な格子作用に $O(a)$ の項を加える      ウィルソン項

$$S_W = -ar \int d^4x \bar{\psi} D^2 \psi \rightarrow -\frac{r}{2} \sum_{n,\mu} [\bar{\psi}_n U_{n,\mu} \psi_{n+\hat{\mu}} + \bar{\psi}_{n+\hat{\mu}} U_{n,\mu}^\dagger \psi_n - 2\bar{\psi}_n \psi_n]$$

$$S_F = S_F^0 + S_W \longrightarrow \bar{\psi}(\gamma \cdot D + m)\psi \quad (a \rightarrow 0) \quad a \rightarrow 0 \text{で連続理論を再現}$$

自由場では、

$$S_F = \bar{\psi}(-p) \left[ i\gamma_\mu \frac{\sin(p^\mu a)}{a} + \boxed{m + \frac{r}{a} \sum_{\mu} (1 - \cos(p^\mu a))} \right] \psi(p)$$

$$\forall p^\mu = 0 \Rightarrow m$$

$$\exists p^\mu = \pi/a \Rightarrow m + 2\frac{r}{a} \times (\# \text{ of } \pi/a) \quad a \rightarrow 0 \text{では発散する無限に重くなり、ダブラーは粒子としては現れない}$$

**問題点**       $m=0$ でも、カイラル対称性がない（ウィルソン項はカイラル対称性を破る）  
（ニールセン・二宮の定理とは矛盾しない）

カイラル対称性の自発的破れを議論するのが難しい

この作用はウィルソン・フェルミオン作用と呼ばれ、実際に良く使われる

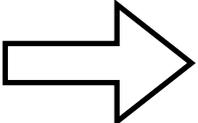
少し書き直すと、

hopping term

$$S_F = \bar{\psi}_n \psi_n - K \sum_{\mu} [\bar{\psi}_n U_{n,\mu}(r - \gamma_{\mu}) \psi_{n+\mu} + \bar{\psi}_{n+\mu} U_{n,\mu}^{\dagger}(r + \gamma_{\mu}) \psi_n]$$

$$K = \frac{1}{2(M + 4r)} \quad \text{hopping parameter}$$

$\psi_n \rightarrow \sqrt{2K} \psi_n$  と rescale した

クォークが重いとKが小さい  ホッピング・パラメタ展開

$n \longrightarrow n + \mu$       クォークが飛ぶ       $\propto U_{n,\mu}$

$n \longleftarrow n + \mu$       反クォークが飛ぶ       $\propto U_{n,\mu}^{\dagger}$

$\longrightarrow \longrightarrow \longrightarrow \longrightarrow$        $\propto U_{n,\mu} U_{n+\mu,\mu} U_{n+2\mu,\mu} U_{n+3\mu,\mu}$

## 5.3 “カイラル”対称性を持つ格子フェルミオン

$S = \bar{\psi} \cdot D \cdot \psi$  もちろん定理からダブリングが無いとカイラル対称性を持ってないのだが。

カイラル対称性の表現  $D\gamma_5 + \gamma_5 D = 0$  (Dと $\gamma_5$ は反可換)

格子上の”カイラル”対称性  $D\gamma_5 + \gamma_5 D = aD\gamma_5 D$  ギンスバーグ・ウィルソン関係式

$$\Rightarrow \gamma_5 D^{-1} + D^{-1} \gamma_5 = a\gamma_5$$

つまり、伝搬関数に対してはカイラル対称性の破れは $O(a)$ 、かつ局所的

この時、無限小”カイラル”変換  $\delta\psi = \gamma_5(1 - \frac{a}{2}D)\psi$ ,  $\delta\bar{\psi} = \bar{\psi}(1 - \frac{a}{2}D)\gamma_5$

$\delta S = \bar{\psi}(D\gamma_5 + \gamma_5 D - aD\gamma_5 D)\psi = 0$  作用は不変になる。

格子上の”カイラル対称性”があり、ダブリングの無いフェルミオンが存在しても、定理とは矛盾しない。

## ギンスバーグ・ウィルソン関係式を満たす格子作用

## オーバラップ演算子

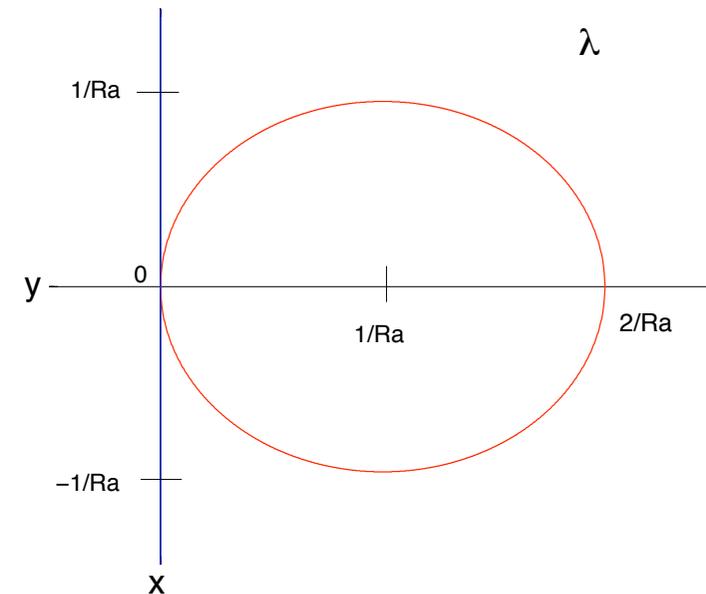
$$D = \frac{1}{a} \left( 1 - \frac{A}{\sqrt{A^\dagger A}} \right) \quad A = D_W(-M)$$

ウィルソン・フェルミオンで  
質量の符号を変えたもの

演算子Aに対する符号関数

オーバラップ演算子はギンスバーグ・ウィルソン関係式を満たし、ダブリングの無い格子フェルミオン作用を与える。 (オーバラップ・フェルミオン)

オーバラップ・フェルミオンは格子”カイラル”対称性のため、連続理論とほぼ同じ性質を持つため、格子QCDの計算には最も優れている。しかしながら、符号関数の計算に時間が掛かるため、ウィルソン・フェルミオンに比べて、計算コストは10倍から100倍。また、格子間隔単位では、局所的ではない。(物理スケールでは局所的。)



オーバラップ演算子の固有値分布

オーバーラップ演算子がギンスバーグ・ウィルソン関係式を満たすことを示す。

$$aD = 1 - V, \quad V = \frac{A}{\sqrt{A^\dagger A}}$$

$$A^\dagger = \gamma_5 A \gamma_5 \Rightarrow V^\dagger = \gamma_5 V \gamma_5$$

$$V^\dagger = V$$

$$\gamma_5 \frac{1}{aD} \gamma_5 = \frac{1}{1 - \gamma_5 V \gamma_5} = \frac{1}{1 - V^\dagger} = \frac{V}{V - 1} = 1 - \frac{1}{1 - V}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a} \gamma_5 D^{-1} \gamma_5 = 1 - \frac{1}{a} D^{-1}$$

$$\Rightarrow \gamma_5 D^{-1} + D^{-1} \gamma_5 = a$$

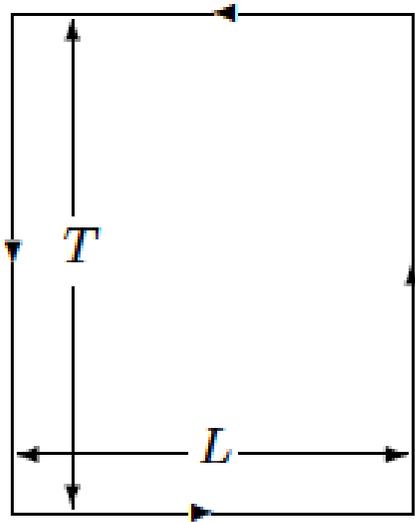
$$\Rightarrow D \gamma_5 + \gamma_5 D = a D \gamma_5 D$$

ギンスバーグ・ウィルソン関係式が示された

# 6. ゲージ理論の観測量と強結合展開

## 6-1. ウィルソン・ループ

ゲージの観測量はゲージ不変、つまり閉じたループ（の関数）に限られる。



$$W(C = L \times T) = \text{tr} \prod_c U \quad \text{ウィルソン・ループ}$$

非常に重いクォーク反クォーク対を生成し、瞬時にLだけ引き離す。重いので、その場所に留まり時間だけが進行する。時間T後に、クォーク反クォークは瞬時に対消滅。クォークと反クォークが動いた後に残ったリンク変数がウィルソン・ループになる。

クォーク反クォーク間の静的ポテンシャル

$$\langle W(C) \rangle \rightarrow \exp[-TV(L)] \quad \text{as } T \rightarrow \infty \quad V(L)$$

面積則  $\langle W(C) \rangle \rightarrow \exp[-cLT] \Rightarrow V(L) = cL$  閉じ込めポテンシャル

離せば離すほどエネルギーが必要

周辺則  $\langle W(C) \rangle \rightarrow \exp[-c'(L + T)] \Rightarrow V(L) = c'(1 + \frac{L}{T}) \sim c'$

非閉じ込め

## 6-2. 強結合展開

SU(N)の群積分

$$\int dU \mathbf{1} = \mathbf{1}, \quad \int dU U_{ab} U_{kl}^\dagger = \frac{1}{N} \delta_{al} \delta_{bk},$$

$$\int dU U_{ab} = 0, \quad \int dU U_{a_1 b_1} U_{a_2 b_2} \cdots U_{a_N b_N} = \frac{1}{N!} \epsilon_{a_1 a_2 \cdots a_N} \epsilon_{b_1 b_2 \cdots b_N}$$

強結合展開

$$g^2 \rightarrow \infty$$

$$\exp \left[ \frac{1}{g^2} \sum_{n, \mu \neq \nu} \text{tr} U_{\mu\nu}(n) \right] = \prod_{n, \mu \neq \nu} \exp \left[ \frac{1}{g^2} \text{tr} U_{\mu\nu}(n) \right] = \prod_{n, \mu \neq \nu} \left[ 1 + \frac{1}{g^2} \text{tr} U_{\mu\nu}(n) + \cdots \right]$$

$$\int dU U = 0 \quad \text{“ゲージ場はランダム”}$$

# ウィルソン・ループの計算

$$W(C) = \text{tr} U_1(n) \overbrace{U_1(n + \hat{1}) \cdots U_4^\dagger(n)}^{\hat{W}}$$

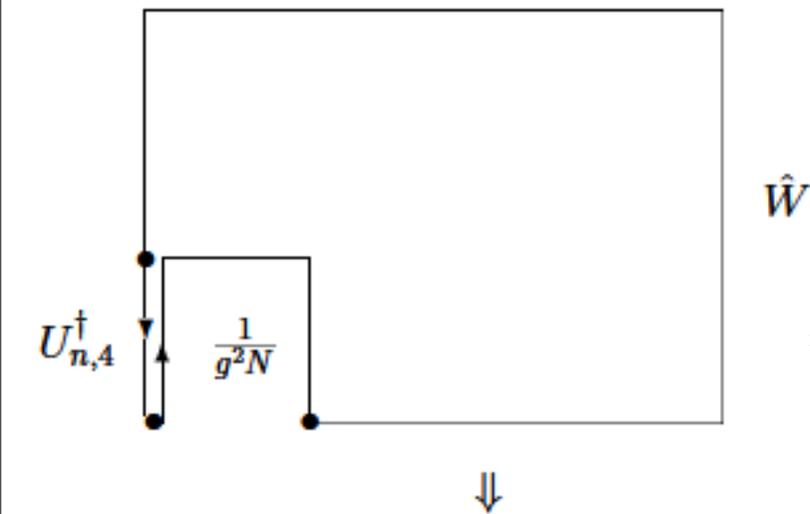
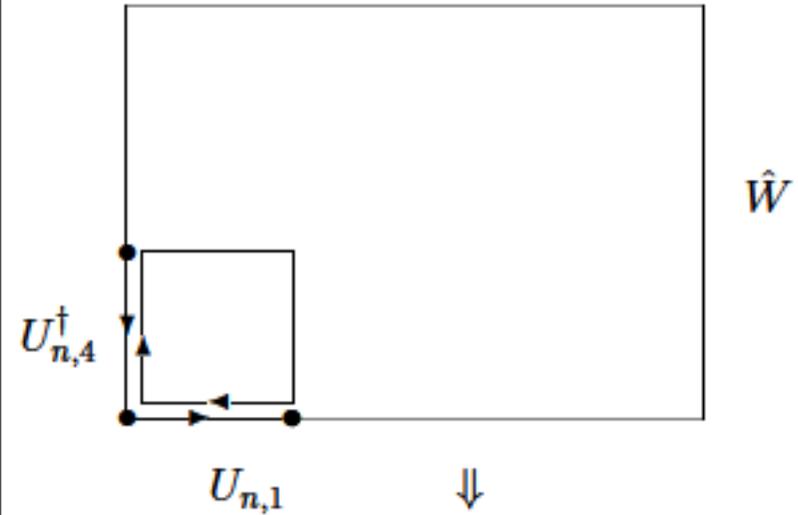
$$\langle W(C) \rangle = \frac{1}{g^2} \int dU_1(n) dU_4(n)$$

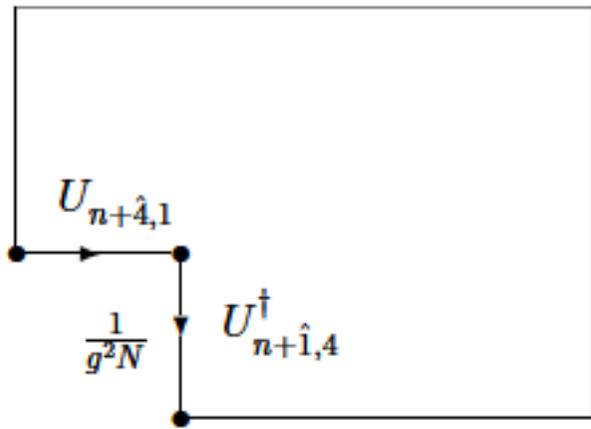
$$\times \text{tr} U_4(n) U_1(n + \hat{4}) U_4^\dagger(n + \hat{1}) U_1^\dagger(n) \times \text{tr} U_1(n) \hat{W} U_4^\dagger(n)$$

$$= \frac{1}{g^2} \int dU_4(n) \{U_4(n) U_1(n + \hat{4}) U_4^\dagger(n + \hat{1})\}_{lk}$$

$$\times \{U_1^\dagger(n)\}_{kl} \{U_1(n)\}_{ab} \{\hat{W} U_4^\dagger(n)\}_{ba} dU_1(n)$$

$$= \frac{1}{g^2 N} \int dU_4(n) \text{tr} U_4(n) U_1(n + \hat{4}) U_4^\dagger(n + \hat{1}) \hat{W} U_4^\dagger(n)$$





$$\hat{W} = \frac{1}{g^2 N} \int dU_4(n) \operatorname{tr} U_1(n + \hat{4}) U_4^\dagger(n + \hat{1}) \hat{W}$$

これを繰り返す

$$\begin{aligned} \langle W(T \times L) \rangle &= \left( \frac{1}{g^2 N} \right)^L \langle W((T-1) \times L) \rangle = \left( \frac{1}{g^2 N} \right)^{LT-1} \langle W(1 \times 1) \rangle \\ &= \left( \frac{1}{g^2 N} \right)^{LT} \operatorname{tr} 1 = N \left( \frac{1}{g^2 N} \right)^{LT} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \langle W(T \times L) \rangle = N e^{-TL \log(g^2 N)} \quad \text{面積則}$$

$$\Rightarrow V(L) = L \log(g^2 N) \quad \text{クォークの閉じ込め}$$

# 7. 連続極限

時空間は格子構造をしているわけではないので、最終的な答えを得るのは格子間隔をゼロにする ( $a \rightarrow 0$ ) 連続極限を取る必要がある。

場の量子論では理論にあるパラメタ (裸のパラメタと呼ぶ) は (無限大の) 量子補正を受けるので、「繰り込み」を行い有限の結果を得る必要がある。

$$g_R^2 = \lim_{a \rightarrow 0} Z_g(a) g_0^2$$

繰り込まれた結合定数      繰り込み定数      裸の結合定数      ゲージ理論の場合、繰り込まれた結合定数が一定になるように繰り込みを行う。

どうやって  $a \rightarrow 0$  の極限をとるのか？ 無次元化した格子作用には、もはや  $a$  はない。

格子ゲージ理論では、裸の結合定数を変化させることが、 $a$  を変化させることに対応。

それでは、どのように裸の結合定数を変化させれば良いか？

## 裸の結合定数と格子間隔との関係

ベータ関数  $\beta(g) = \mu \frac{dg}{d\mu} = -b_0 g^3 + \dots$

$$b_0 = \frac{1}{16\pi^2} \frac{11N}{3}$$

スケールに依存する結合定数(running coupling)に対する常微分方程式

この方程式を積分する。  $\int_{1/a}^{\Lambda_L} \frac{d\mu}{\mu} = -\frac{1}{2b_0} \int_{g_0^2}^{\infty} \frac{dg^2}{g^4}$   $\Lambda_L$  結合定数が発散するスケール (これを固定)

$$\Rightarrow g_0^2 = -\frac{1}{2b_0 \log \Lambda_L a}$$

短距離( $a \rightarrow 0$ )で結合定数がゼロ(漸近的自由性)

$$\Rightarrow a = \frac{1}{\Lambda_L} \exp \left[ -\frac{1}{2b_0 g_0^2} \right]$$

強結合とは逆

したがって

連続極限は

$$a \rightarrow 0 \iff g_0^2 \rightarrow 0$$

また、すべての次元を持つ物理量Kは、格子上では無次元なので、以下の振る舞いをするはず。

$$K a^{d_K} = C(\Lambda_L a)^{d_K} = C e^{-\frac{d_K}{2b_0 g_0^2}} + \dots$$

(漸近的) スケーリング

$d_K$  物理量の質量次元

$\Lambda_L$  を単位として係数CからKの値が決まる。

$$K = C(\Lambda_L)^{d_K}$$

Part II.  
モンテカルロ法による  
ハドロン質量の計算

## 8.経路積分表示

## 9.ゲージ配位の生成法

1. ハイブリット・モンテカルロ法(HMC)
2. QCDに対するHMC法
3. コメント

## 10.クォーク伝搬関数の計算

1. CG法のアルゴリズム
2. 反復法の収束の加速
3. HMC法での計算アルゴリズム

## 11.データの解析方法

1. 質量の計算法
2. 誤差評価とフィット
3. ハドロン質量のクォーク質量依存性
4. 連続極限

## 12.最新の結果

1. ハドロンのスペクトラム
2. カイラル摂動論(ChPT)を用いたカイラル外挿

# クォークとハドロン

ハドロン：クォークの束縛状態

クォーク：ここでは質量の軽いu,d,sの3つを考える。ただし、質量は

$m_l = (m_u + m_d)/2, m_s$  として、uとdの質量差は考えない。

(最近は質量差は取り入れる試みあり。)

中間子

Meson

擬スカラー

ベクター

重粒子

Baryon

8重項

10重項

Quarks	PesudoScala(0)	Vector(1)	Quarks	Octet( $\frac{1}{2}$ )	Decouplet( $\frac{3}{2}$ )
$\bar{u}u - \bar{d}d$	$\pi^0$	$\rho^0$	$uuu$		$\Delta^{++}$
$\bar{d}u, \bar{u}d$	$\pi^\pm$	$\rho^\pm$	$uud$	$p$	$\Delta^+$
$\bar{u}u + \bar{d}d$	$\eta$	$\omega$	$udd$	$n$	$\Delta^-$
$\bar{s}d, \bar{d}s$	$K^0, \bar{K}^0$	$(K^*)^0, (\bar{K}^*)^0$	$ddd$		$\Delta^0$
$\bar{s}u, \bar{u}s$	$K^\pm$	$(K^*)^\pm$	$uus$	$\Sigma^+$	$(\Sigma^*)^+$
$\bar{s}s$	$\eta_s$	$\phi$	$uds$	$\Sigma^0, \Lambda^0$	$(\Sigma^*)^0$
			$dds$	$\Sigma^-$	$(\Sigma^*)^-$
			$uss$	$\Xi^0$	$(\Xi^*)^0$
			$dss$	$\Xi^-$	$(\Xi^*)^-$
			$sss$		$\Omega$

# 8.経路積分表示

やりたいことは、経路積分を数値的に実行すること

$$S = S_G(U) + \bar{\psi} D(U) \psi, \quad \langle \mathcal{O}(\bar{\psi}, \psi, U) \rangle = \frac{\int dU d\bar{\psi} d\psi \mathcal{O} e^{-S}}{\int dU d\bar{\psi} d\psi e^{-S}}$$

フェルミオンはグラスマン数（反可換な数）で表現されているので数値計算出来ない。

幸い、手で積分できるので、実行すると

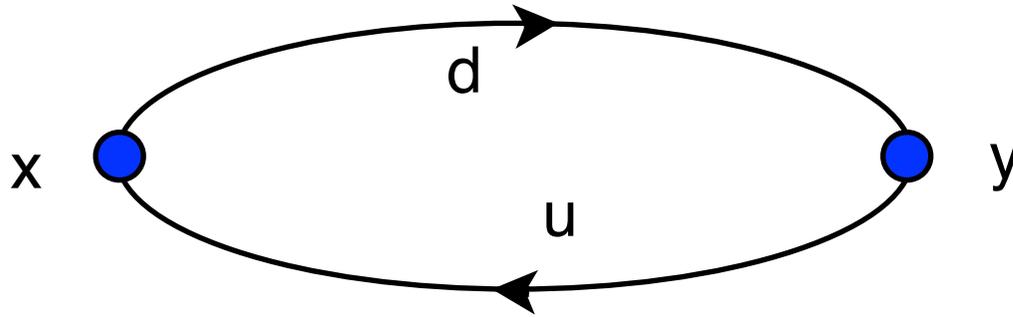
$$\begin{aligned} & \int dU d\bar{\psi} d\psi \mathcal{O}(\bar{\psi}, \psi, U) e^{-S} \\ &= \int dU e^{-S_G(U)} \mathcal{O}\left(-\frac{\delta}{\delta \eta}, \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}}, U\right) \int d\bar{\psi} d\psi e^{-\bar{\psi} D \psi + \bar{\psi} \eta + \bar{\eta} \psi} \Bigg|_{\eta = \bar{\eta} = 0} \\ &= \int dU e^{-S_G(U)} \mathcal{O}\left(-\frac{\delta}{\delta \eta}, \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}}, U\right) \underline{\det D(U)} e^{\bar{\eta} D^{-1}(U) \eta} \Bigg|_{\eta = \bar{\eta} = 0} \end{aligned}$$

ソース（外場）を導入

ボソンとは違って行列式そのものが出る

## 例：パイ中間子の2点関数

$$\langle \bar{u}(x) \gamma_5 d(x) \cdot \bar{d}(y) \gamma_5 u(y) \rangle$$
$$= -\frac{1}{Z} \int \mathcal{D}U \det D(U) e^{-S_G(U)} \text{tr} [D_d^{-1}(U)_{xy} \gamma_5 D_u^{-1}(U)_{yx} \gamma_5]$$



ウィルソン・フェルミオン( $r=1$ )

$$D_u = D_d$$

$$m_u = m_d$$

$$D_{nm} = \delta_{n,m} - K \sum_{\mu} [\delta_{m,n+\hat{\mu}} U_{n,\mu} (1 - \gamma_{\mu}) + \delta_{m,n-\hat{\mu}} U_{m,\mu}^{\dagger} (1 + \gamma_{\mu})]$$

Uの数値的な区分求積は不可能  $10^4$  格子 ゲージ場 (独立成分は $8 \times 4$ )、メッシュ10の区分求積

$10^{3.2 \times 10^5}$  Flop 10 Peta Flopsの計算機で  $10^{319975}$  years 必要

積分に効く部分のみを計算 (important sampling)

# 計算手順

1. ゲージ場  $U$  を以下の確率で生成 (important sampling)  $P(U) \propto \det D(U) e^{-S_G(U)}$

2. 伝搬関数を計算  $D^{-1}(U)_{y,x_0}$  for  $\exists x_0, \forall y$

$$D_{xy} \phi_y^{x_0} = \delta_{xx_0} \quad \text{線形方程式を逐次法で解く} \quad \Longrightarrow \quad \phi_y^{x_0} = D_{yx}^{-1} \delta_{xx_0} = D_{yx_0}^{-1}$$

3. 次の関係式を使う。  $\gamma_5 D^\dagger \gamma_5 = D \rightarrow D_{XY}^{-1} = \gamma_5 (D^\dagger)_{XY}^{-1} \gamma_5 = \gamma_5 (\bar{D}^{-1})_{YX} \gamma_5$  カラー

$$X = (x, A, \alpha)$$

4. 演算子  $\mathcal{O}$  を構成

場所    スピノル

$$\text{tr} \gamma_5 D_{x_0 y}^{-1} \gamma_5 D_{y x_0}^{-1} = (\bar{D}^{-1})_{y x_0, \beta \alpha_0}^{B A_0} (D^{-1})_{y x_0, \beta \alpha_0}^{B A_0} = \sum_{y, \beta, B} \bar{\phi}_{y, \beta}^B \phi_{y, \beta}^B$$

$$(D_{xy, \alpha \beta}^{AB} \phi_{y, \beta}^B = \delta_{x, x_0} \delta_{\alpha, \alpha_0} \delta^{A, A_0})$$

5. 1 に戻り、繰り返す  $U_1 \rightarrow U_2 \rightarrow \dots \rightarrow U_N$

6. たくさん集めたら平均を計算。

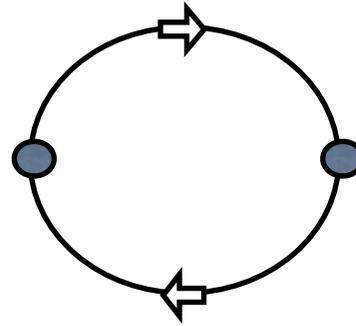
$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathcal{O}(U_i) \rightarrow \int dU \det D(U) e^{-S_G(U)} \mathcal{O}(U)$$

$\det D(U)$  の計算に時間が掛かるので、かつては、 $\det D(U) = 1$

という近似がよく使われてきた。

$$P(U) \propto e^{-S_G(U)} \quad \text{”クエンチ近似”}$$

物理的には真空からのクォーク反クォーク対の生成消滅を無視することに相当



計算機の進歩とともに行列式の寄与を含んだ計算(full QCD)を行われるようになった。

手法のテストなどではクエンチ近似が良く使われる。

# 9. ゲージ配位の生成法

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \int_a^b dx P(x) \mathcal{O}(x), \quad \int_a^b dx P(x) = 1 \quad \text{を考える}$$

## メトロポリス法

$a < x < b$  の一様乱数を  $N$  個生成。

$$\langle \mathcal{O} \rangle \simeq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathcal{O}(x_i) P(x_i)$$

単純でどんな場合にも使えるが、大抵、効率が悪い

## 熱浴法

変数変換  $y = \int_a^x dz P(z), \quad dy = dx P(x)$

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \int_0^1 dy \hat{\mathcal{O}}(y), \quad \hat{\mathcal{O}}(y) = \mathcal{O}(x[y])$$

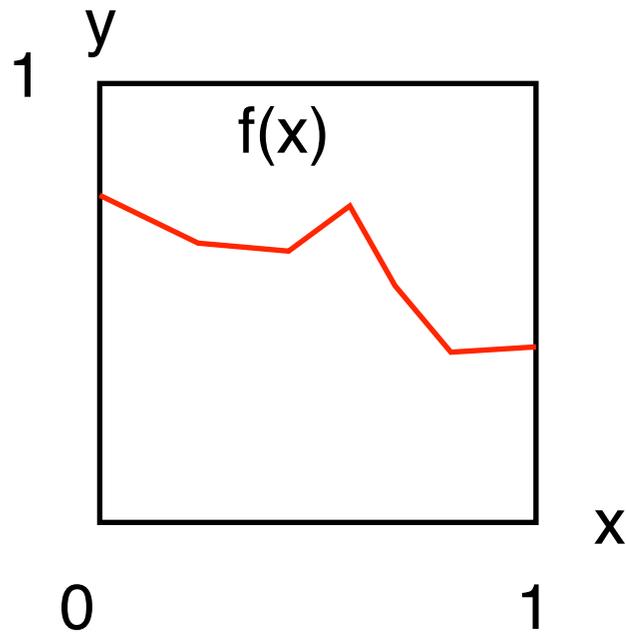
1.  $0 < y < 1$  一様乱数

2. 解析的に逆を計算  $y = \int_a^x dz P(z), \quad y \rightarrow x[y]$

3. 平均 
$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{\mathcal{O}}(y_i) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathcal{O}(x[y_i])$$

効率は良いが、使える場合が限られる。クエンチ近似のQCDなど。

## モンテカルロ法による積分とは



例として関数  $0 < f(x) < 1$ ,  $0 < x < 1$  を積分することを考える

$0 < x < 1$ ,  $0 < y < 1$  である一様乱数  $(x, y)$  を発生させる。

$y < f(x)$  なら当たり。逆ならばはずれ。

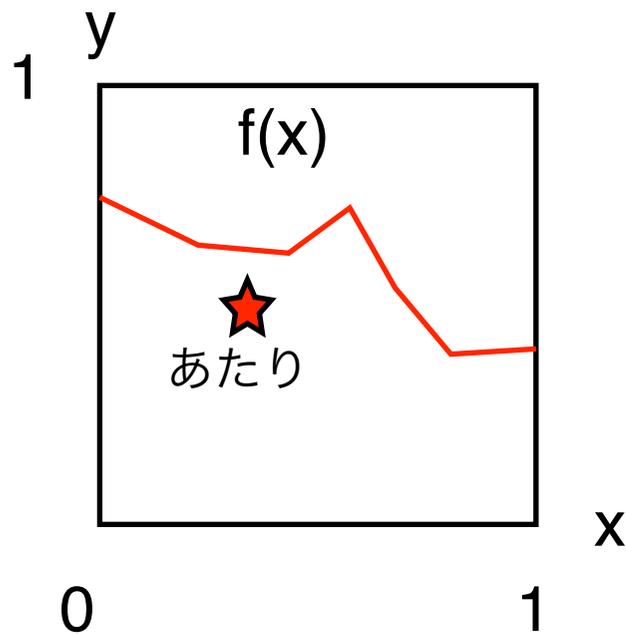
これを  $N$  回繰り返す。当たりの回数を  $N_{\text{hit}}$  とする。

積分は

$$\int_0^1 f(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_{\text{hit}}}{N}$$

で与えられる。

## モンテカルロ法による積分とは



例として関数  $0 < f(x) < 1$ ,  $0 < x < 1$  を積分することを考える

$0 < x < 1$ ,  $0 < y < 1$  である一様乱数  $(x, y)$  を発生させる。

$y < f(x)$  なら当たり。逆ならばずれ。

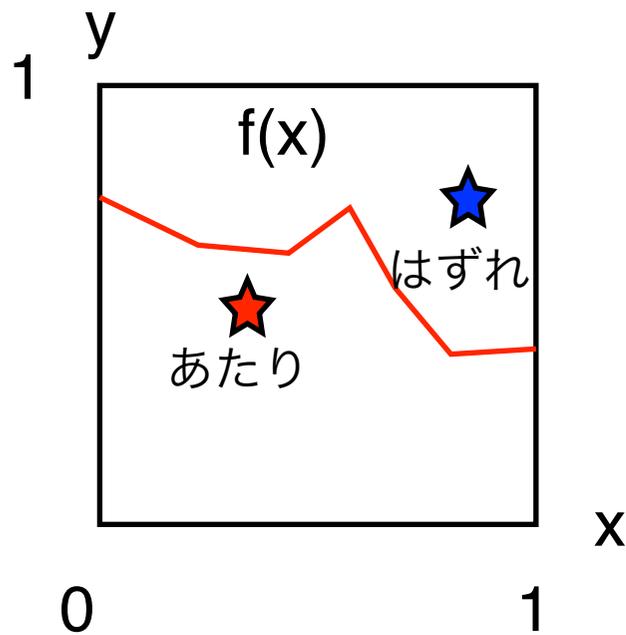
これを  $N$  回繰り返す。当たりの回数を  $N_{\text{hit}}$  とする。

積分は

$$\int_0^1 f(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_{\text{hit}}}{N}$$

で与えられる。

## モンテカルロ法による積分とは



例として関数  $0 < f(x) < 1$ ,  $0 < x < 1$  を積分することを考える

$0 < x < 1$ ,  $0 < y < 1$  である一様乱数  $(x, y)$  を発生させる。

$y < f(x)$  なら当たり。逆ならはずれ。

これを  $N$  回繰り返す。当たりの回数を  $N_{\text{hit}}$  とする。

積分は

$$\int_0^1 f(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_{\text{hit}}}{N}$$

で与えられる。

## 9-1. ハイブリッド・モンテカルロ法 (HMC)

full QCDに対してもっともよく使われている方法

定理

$P(U \rightarrow U')$  ゲージ場を変更していく方法(確率過程、マルコフ過程等と呼ぶ)

これが以下の条件を満たす  $e^{-S(U)} P(U \rightarrow U') = e^{-S(U')} P(U' \rightarrow U)$  詳細釣り合い

$$\int dU' P(U \rightarrow U') = 1 \quad \text{確率保存}$$

Pを多数回繰り返して得られた平衡分布  $\lim_{N \rightarrow \infty} P^N(U_0 \rightarrow U) = P_{\text{eq}}(U)$

$$\Rightarrow \boxed{P_{\text{eq}}(U) = \frac{1}{Z} e^{-S(U)}} \quad Z = \int dU e^{-S(U)}$$

このとき

$$\int dU' P_{\text{eq}}(U') P(U' \rightarrow U) = \frac{1}{Z} \int dU' e^{-S(U')} P(U' \rightarrow U) = P_{\text{eq}}(U)$$

P不変

一般的な場合  $S(\phi)$  が与えられている

1. 初めの配位  $\phi$

2. "運動量"  $\pi$  をガウス分布で生成  $P(\pi) \propto e^{-\pi^2/2}$

3. 分子動力学(MD)で時間発展 (時間の長さ=1): 差分方程式を数値的に解く

$$\begin{cases} \dot{\phi} = \frac{\partial H[\phi, \pi]}{\partial \pi} = \pi \\ \dot{\pi} = -\frac{\partial H[\phi, \pi]}{\partial \phi} = -\frac{\partial S(\phi)}{\partial \phi} \end{cases}$$

ハミルトニアン

$$H[\phi, \pi] = \frac{1}{2}\pi^2 + S(\phi)$$

4. accept-reject判定  $\phi' = \phi(1), \pi' = \pi(1)$

$$P(\{\phi, \pi\} \rightarrow \{\phi', \pi'\}) = \min\{1, e^{-\Delta H}\} \quad \text{受け入れ確率}$$

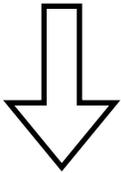
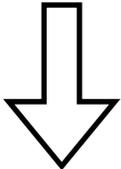
$$\Delta H = H(\phi', \pi') - H(\phi, \pi) \begin{cases} < 0 & \text{accepted} \\ > 0 & \text{accepted with probability } e^{-\Delta H} \end{cases}$$

連続時間のMDではエネルギーが保存するので、必ずaccept  
差分にすると保存しない

5. accept ( $\phi' \rightarrow \phi$ ) あるいはreject( $\phi$ はそのまま) で、2に戻る

# 分子動力学の差分化 (Leap-Frog法)

離散時間ステップ  $\epsilon = 1/N$

初め	$\left\{ \begin{array}{l} \phi(0) = \phi \\ \pi(\frac{1}{2}) = \pi - \frac{\epsilon}{2} \frac{\partial S(\phi)}{\partial \phi(0)} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \phi = \phi(1) - \epsilon \pi(\frac{1}{2}) \\ -\pi = -\pi(\frac{1}{2}) - \frac{\epsilon}{2} \frac{\partial S(\phi)}{\partial \phi(0)} \end{array} \right.$
		
中間	$\left\{ \begin{array}{l} \phi(n+1) = \phi(n) + \epsilon \pi(n + \frac{1}{2}) \\ \pi(n + \frac{3}{2}) = \pi(n + \frac{1}{2}) - \epsilon \frac{\partial S(\phi)}{\partial \phi(n+1)} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \phi(n) = \phi(n+1) - \epsilon \pi(n + \frac{1}{2}) \\ -\pi(n + \frac{1}{2}) = -\pi(n + \frac{3}{2}) - \epsilon \frac{\partial S(\phi)}{\partial \phi(n+1)} \end{array} \right.$
		
最後	$\left\{ \begin{array}{l} \phi' = \phi(N) = \phi(N-1) + \epsilon \pi(N - \frac{1}{2}) \\ \pi' = \pi(N) = \pi(N - \frac{1}{2}) - \frac{\epsilon}{2} \frac{\partial S(\phi)}{\partial \phi(N)} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \phi(N) = \phi' \\ -\pi(N - \frac{1}{2}) = -\pi' - \frac{\epsilon}{2} \frac{\partial S(\phi)}{\partial \phi(N)} \end{array} \right.$

可逆性  $\{\phi, \pi\} \rightarrow \{\phi', \pi'\} \quad \longleftrightarrow \quad \{\phi', -\pi'\} \rightarrow \{\phi, -\pi\}$

# 詳細釣り合いの証明

1. 運動量  $P_G(\pi) = N_0 e^{-\pi^2/2}$

2. MDの可逆性より  $P_M(\{\phi, \pi\} \rightarrow \{\phi', \pi'\}) = P_M(\{\phi', -\pi'\} \rightarrow \{\phi, -\pi\})$

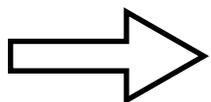
3. メトロポリス判定  $P_A(\Phi \rightarrow \Phi') = \min\{1, e^{-\Delta H}\}$   $\Phi = \{\phi, \pi\}$

4. この時  $e^{-H} P_A(\Phi \rightarrow \Phi') = e^{-H'} P_A(\Phi' \rightarrow \Phi)$

Proof of 4

$$H' - H < 0 \Rightarrow \begin{cases} e^{-H} P_A(\Phi \rightarrow \Phi') & = e^{-H} \\ e^{-H'} P_A(\Phi' \rightarrow \Phi) & = e^{-H'} e^{-(H-H')} = e^{-H} \end{cases}$$

$$H' - H > 0 \Rightarrow \begin{cases} e^{-H} P_A(\Phi \rightarrow \Phi') & = e^{-H} e^{-(H'-H)} = e^{-H'} \\ e^{-H'} P_A(\Phi' \rightarrow \Phi) & = e^{-H'} \end{cases}$$



全体の確率

$$P(\phi \rightarrow \phi') = \int d\pi d\pi' P_G(\pi) P_M(\Phi \rightarrow \Phi') P_A(\Phi \rightarrow \Phi')$$

$$e^{-S(\phi)} P(\phi \rightarrow \phi')$$

$$= \int d\pi d\pi' e^{-H} P_M(\Phi \rightarrow \Phi') P_A(\Phi \rightarrow \Phi')$$

$$= \int d\pi d\pi' e^{-H'} P_A(\Phi' \rightarrow \Phi) P_M(\Phi \rightarrow \Phi')$$

$$= e^{-S(\phi')} \int d\pi d\pi' P_G(\pi') P_M(\{\phi', -\pi'\} \rightarrow \{\phi, -\pi\}) P_A(\Phi' \rightarrow \Phi)$$

$$= e^{-S(\phi')} \int d\pi d\pi' P_G(\pi') P_M(\{\phi', \pi'\} \rightarrow \{\phi, \pi\}) P_A(\Phi' \rightarrow \Phi)$$

$$= e^{-S(\phi')} P(\phi' \rightarrow \phi).$$

証明終わり

## 9-2. QCDに対するハイブリッド・モンテカルロ法

$$P(U) = \det D(U) e^{-S_G(U)} \quad \text{達成したい確率分布、行列式の計算が大変}$$

$N_f = 2n$  同じ質量を持つクォークが偶数個

$$\det D(U) = [\det D_0(U)]^{N_f} = [\det D_0^\dagger D_0]^{N_f/2} \quad (D_0^\dagger = \gamma_5 D_0 \gamma_5)$$

正定値

$$P(U) = e^{-S_G(U)} \int d\phi d\phi^* e^{-\phi^* (D_0^\dagger D_0)^{-1} \phi}$$

$\phi$   $n$ 個の擬フェルミオン (つまり複素ボソン)

$$H = \frac{1}{2} \sum_l P_l^2 + S_G(U) + \phi^* (D_0^\dagger D_0)^{-1} \phi$$

$P_l$ : momentum for  $U_l$  ( $l = (n, \mu)$ )

$$Z = \int \mathcal{D}U \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\phi^* \mathcal{D}P e^{-H}$$

# QCDに対するHMC法のアルゴリズム

1. initial  $U$

2.  $P_l$  from  $P(P_l) \propto e^{-P_l^2/2}$

3.  $\xi$  from  $P(\xi) \propto e^{-\xi^* \xi/2} \Rightarrow \phi = D_0^\dagger(U)\xi$  fixed.

$$e^{-\xi^* \xi/2} = \exp\left[-\frac{1}{2}\phi^* (D_0^\dagger D_0)^{-1} \phi\right]$$

4. MD (leap-frog)

この計算に時間がかかる

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta = (D_0^\dagger D_0)^{-1}(U)\phi \quad \text{MD中では外場} \\ \dot{U}_l = iP_l U_l \quad U_l = e^{iA_l} \\ \dot{P}_l = -\frac{\partial S_G}{\partial A_l} - \phi^* \frac{\partial (D_0^\dagger D_0)^{-1}}{\partial A_l} \phi = -\frac{\partial S_G}{\partial A_l} + \eta^* \frac{\partial D_0^\dagger D_0}{\partial A_l} \eta \end{array} \right.$$

5. Metropolis test  $P = \min\{1, e^{-(H' - H)}\} \Rightarrow$  Go back to 2.

## Leap-frog

$$\left\{ \begin{array}{l} P_l(\tau + \frac{\epsilon}{2}) = P_l(\tau - \frac{\epsilon}{2}) - \epsilon \left[ \frac{\partial S_G}{\partial A_l(\tau)} - \eta^*(\tau) \frac{\partial D_0^\dagger D_0}{\partial A_l(\tau)} \eta(\tau) \right] \\ U_l(\tau) = e^{i\epsilon P_l(\tau - \frac{\epsilon}{2})} U_l(\tau - \epsilon) \\ \eta(\tau) = (D_0^\dagger D_0)^{-1} (U_l(\tau)) \phi \end{array} \right.$$

ゲージ場の微分 (独立な自由度はリー代数)

$$\dot{P}_l = \dot{P}_l^a t^a = -D_l^a [S(U)] t^a$$

$$D_l^a [f(U)] \equiv i \sum_{ij} (t^a U_l)_{ij} \frac{\partial f(U)}{\partial (U_l)_{ij}}$$

## 9-3. コメント

1. 離散化の誤差  $\Delta H \propto \epsilon^2 \sqrt{V} \xrightarrow{\text{random walk}} \epsilon \sim V^{-1/4}$

なるべく小さなN（大きな $\epsilon$ ）だと1/Dの計算時間が少ない。一方、エネルギーの誤差が大きいとメトロポリス判定を通らない。

大きな $\epsilon$ でも誤差が小さいアルゴリズムなどの改良は現在も盛ん。（Leap-frogを他のものに変える。MDの力学変数を工夫するなど。

2. 奇数クォークの場合のHMC法もある。PHMC（多項式HMC法）、RHMC(有理式HMC法)

多項式や有理式で展開

$$\det D_0 = (\det D_0^\dagger D_0)^{1/2} = \int d\phi d\phi^* e^{-\phi^* \sqrt{D_0^\dagger D_0} \phi}$$

3. 確率分布を使った計算では、P(U)が非負であることが必要。

有限密度のQCDでは、P(U)が複素数になるので、HMCなどの方法は使えない。現在も残る格子QCDの大問題。

# 10. クォーク伝搬関数の計算

クォーク伝搬関数の計算やHMCのMDの中では、 $D$ の逆の計算が必要。格子QCDではこの部分の計算が最も時間が掛かる。

クォーク伝搬関数の計算

$$(D^{-1})_{xy,\alpha,\beta}^{AB}$$

線形方程式  $D(X, Y)\phi(Y) = \delta_{X, X_0}$ ,  $X = (x, A, \alpha)$   $\Rightarrow$   $\phi(X) = D^{-1}(X, X_0)$

$D$ は大規模疎行列なので、直接法では時間が掛かりすぎて使えない。反復解法を使う。

$$D \cdot x = b$$

という線形方程式を反復法で解くアルゴリズムとしては、共役傾斜(CG)法などが知られている。

$$S(x) = \frac{1}{2} |b - Dx|^2 \quad \text{を最小化するように計算を進める。 (傾斜法)}$$

## 10-1. CG法のアルゴリズム

1. initial  $x_0$ , then calculate

$$r_0 = b - Dx_0, \quad p_0 = s_0 = D^\dagger r_0$$

2. repeat  $k = 0, 1, 2, \dots$

反復解  $x_{k+1} = x_k + \lambda_k p_k$

$$\lambda_k = \frac{(s_k, p_k)}{|Dp_k|^2}$$

If  $|r_{k+1}|^2 < \epsilon$ , then stop

$r_{k+1} = b - Dx_{k+1} = r_k - \lambda_k Dp_k$  残差

傾斜  $s_{k+1} = D^\dagger r_{k+1} = s_k - \lambda_k D^\dagger Dp_k$

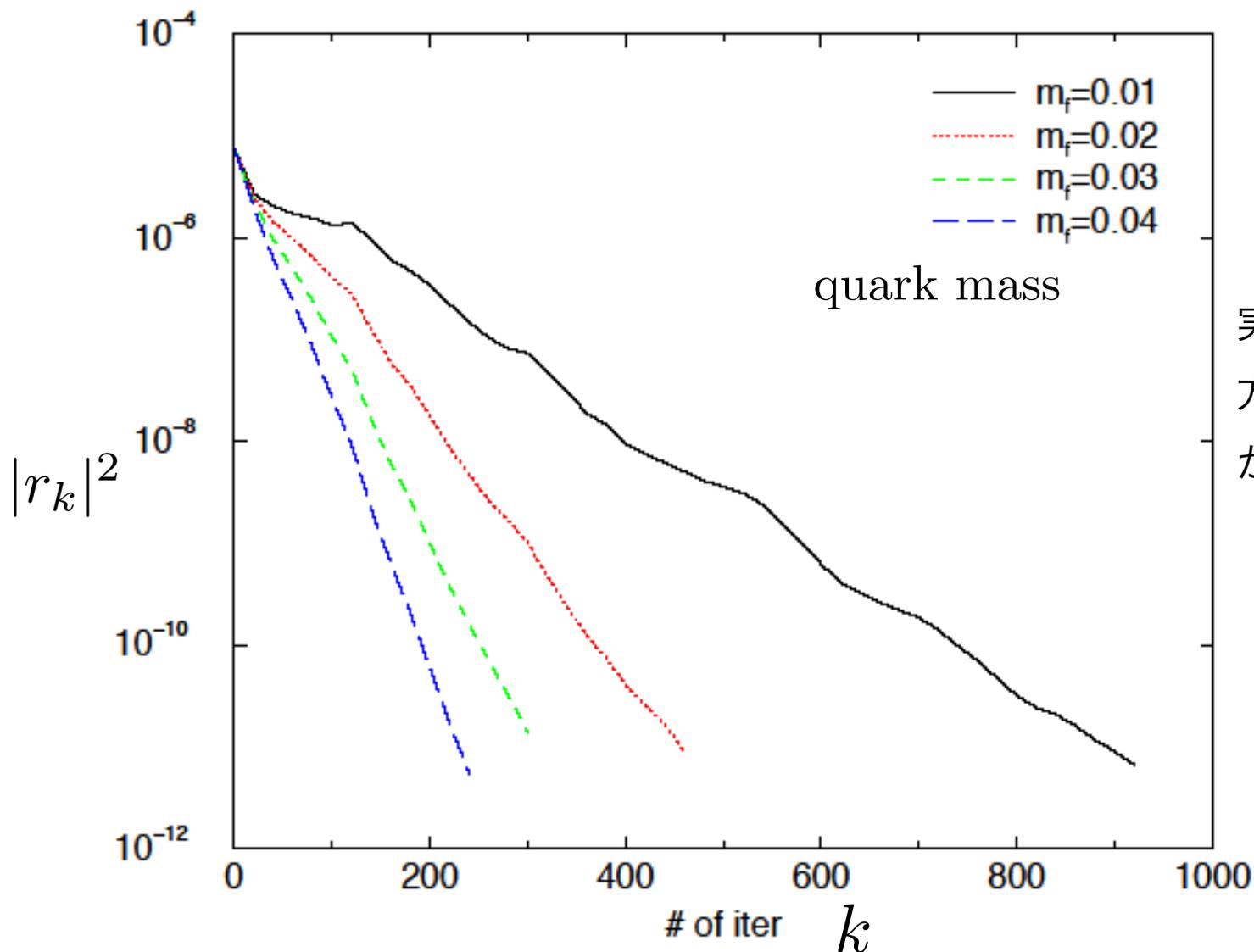
探査方向  $p_{k+1} = s_{k+1} + \mu_k p_k$   $\nabla_{x_k} S(x_k) = -s_k$

$$\mu_k = \frac{(p_k, D^\dagger Ds_k)}{|Dp_k|^2} = \frac{(D^\dagger Dp_k, s_k)}{|Dp_k|^2}$$

共役傾斜(CG)法は有限回で必ず収束する。

例 CG法での残差の減り方は条件数(Dの最大固有値／最小固有値) で決まる  
Dの最大固有値はほぼ一定。Dの最小固有値はクォーク質量に比例。

$r^2$  vs # of iter



実際、軽いほど残差の減り方が遅く、収束に時間が掛かる。

クォーク質量を軽くするのが難しい理由の1つ。

## 10-2. 反復法の収束の加速

1. CG法から他の反復法(BiCGM BiCGstab, MRなど)に変えることで、収束が良くなる場合はある。現在もより良い反復法開発の研究が行われている。

2. 前処理：Dに新しい行列Lを掛けて条件数を減らすことが出来れば、収束までの反復回数は減る。これを前処理という。ただし、Lの計算は簡単であることが必要。

$$D \cdot x = b \Rightarrow L \cdot D \cdot x = L \cdot b$$

例：ウィルソン・クォークに対する偶奇前処理  $D_W = 1 - KT = \begin{pmatrix} 1_{ee} & -KT_{eo} \\ -KT_{oe} & 1_{oo} \end{pmatrix}$

$$D_W \cdot x = b \Rightarrow (1 - K^2T^2)x = (1 + KT)b \Rightarrow (1 - K^2T^2)x_e = b_e + KT_{eo}b_o \equiv B_e$$

$\times(1 + KT) \qquad x = x_e + x_o, \quad b = b_e + b_o$

$$\Rightarrow x_e = \underline{(1 - K^2T^2)^{-1}} B_e \Rightarrow x_o = b_o + KT_{oe}x_e$$

Kが小さいとより1に近く、条件数が小さい

計算コストは同じ

### 10-3. HMCでの計算アルゴリズム

$$\eta = (D^\dagger D)^{-1} \phi$$

$D^\dagger D \cdot \eta = \phi$  を解くためのCG法

$$A = D^\dagger D = A^\dagger$$

1. initial  $x_0$ , the calculate

$$r_0 = b - x_0, \quad p_0 = r_0$$

2. repeat  $k = 0, 1, 2, \dots$

$$\alpha_k = \frac{(p_k, r_k)}{(p_k, Ap_k)}$$

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$$

$$r_{k+1} = r_k - \alpha_k Ap_k$$

$$p_{k+1} = r_{k+1} + \mu_k p_k$$

If  $|r_{k+1}|^2 < \epsilon$ , then stop

$$\mu_k = -\frac{(r_{k+1}, Ap_k)}{(p_k, Ap_k)}$$

Dの逆の計算と1回の反復での計算量は同じ  
ただし、条件数は2乗される

## おまけ

$$(D + m_i \mathbf{1}) \cdot x_i = b \quad i = 1, 2, \dots, N$$

というN個の線形方程式は、

$$(D + m_{\min} \mathbf{1}) \cdot x = b$$

という1つの線形方程式を解くコストとほぼ同じコストで一度に解ける

“multi-mass solver”と呼ぶ。右辺のbが共通なことが必要。

# 11. データの解析方法

## 11-1. 質量の計算法

質量はどうやって計算するか？

ハドロンの伝搬関数

$$\begin{aligned} G(t) &= \sum_{\vec{x}} \langle \pi(\vec{0}, 0) \pi(\vec{x}, t) \rangle \\ &= \sum_{\vec{x}} \langle 0 | \pi(0) e^{iP \cdot x} \pi(0) e^{-iP \cdot x} | 0 \rangle \\ &= \sum_{\vec{x}} \sum_n \langle 0 | \pi(0) | n \rangle \langle n | \pi(0) | 0 \rangle e^{ip_n x} \\ &= \sum_n |Z_n|^2 e^{-m_n t} \quad Z_n = \langle 0 | \pi(0) | n \rangle, (p_n)_0 = im_n \\ &= |Z_0|^2 e^{-m_0 t} + O(e^{-\Delta m_n t}) \quad \Delta m_n = m_n - m_0 \end{aligned}$$

$m_0$  : the lightest mass

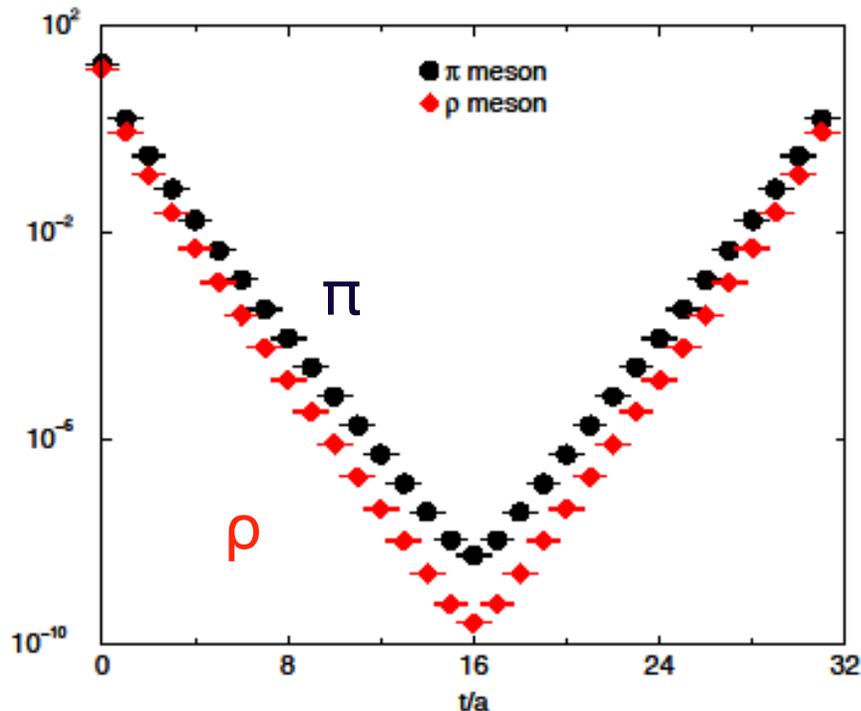
このようにハドロンの伝搬関数からその演算子で作られる一番軽い粒子の質量が求まる

# Meson(中間子)

周期境界条件 ( $0 < t < T$ )

$$\begin{aligned}\langle \pi(0)\pi(t) \rangle_T &\equiv \sum_n \langle n | \pi(0)\pi(t) e^{-HT} | n \rangle \\ &= \sum_n \langle 0 | \pi | n \rangle \langle n | \pi | 0 \rangle e^{-m_n t} + \sum_n \langle n | \pi | 0 \rangle \langle 0 | \pi | n \rangle e^{-m_n (T-t)} \\ &= \sum_n |Z_n|^2 (e^{-m_n t} + e^{-m_n (T-t)}) \\ &= |Z_0|^2 e^{-m_0 T/2} 2 \cosh(m_0 (t - T/2)) + O(e^{-\Delta m_n t})\end{aligned}$$

Meson propagator

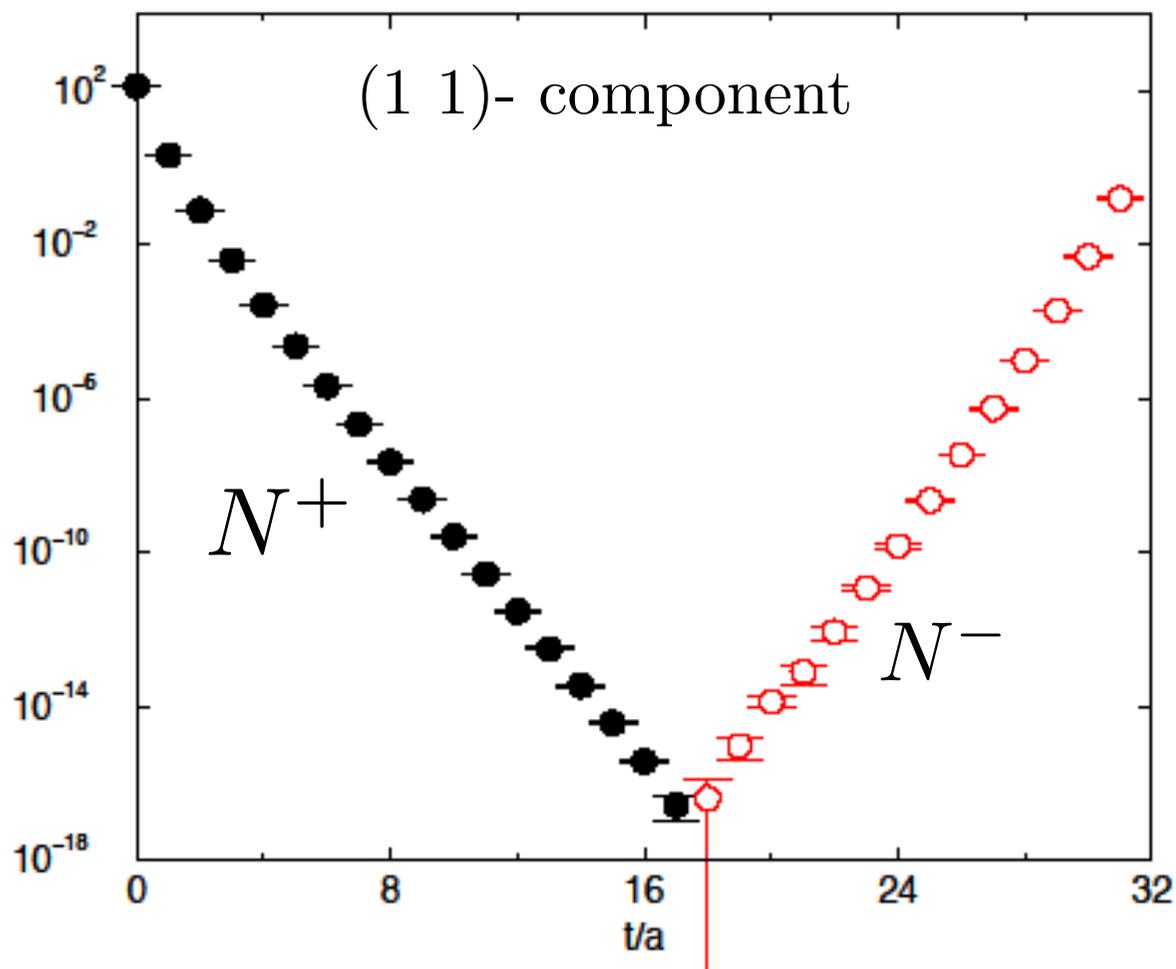


$\pi$ の方が $\rho$ より軽い

# Baryon (重粒子)

$$\langle N_\alpha(0) \bar{N}_\beta(t) \rangle = \frac{(1 + \gamma_0)_{\alpha\beta}}{2} \left( Z_+ e^{-m_{N^+} t} - Z_- e^{-m_{N^-} (T-t)} \right) + \frac{(1 - \gamma_0)_{\alpha\beta}}{2} \left( Z_- e^{-m_{N^-} t} - Z_+ e^{-m_{N^+} (T-t)} \right)$$

## Nucleon propagator



$m_{N^+}$  : mass of nucleon

$m_{N^-}$  : mass of negative parity state

## Effective mass (有効質量)

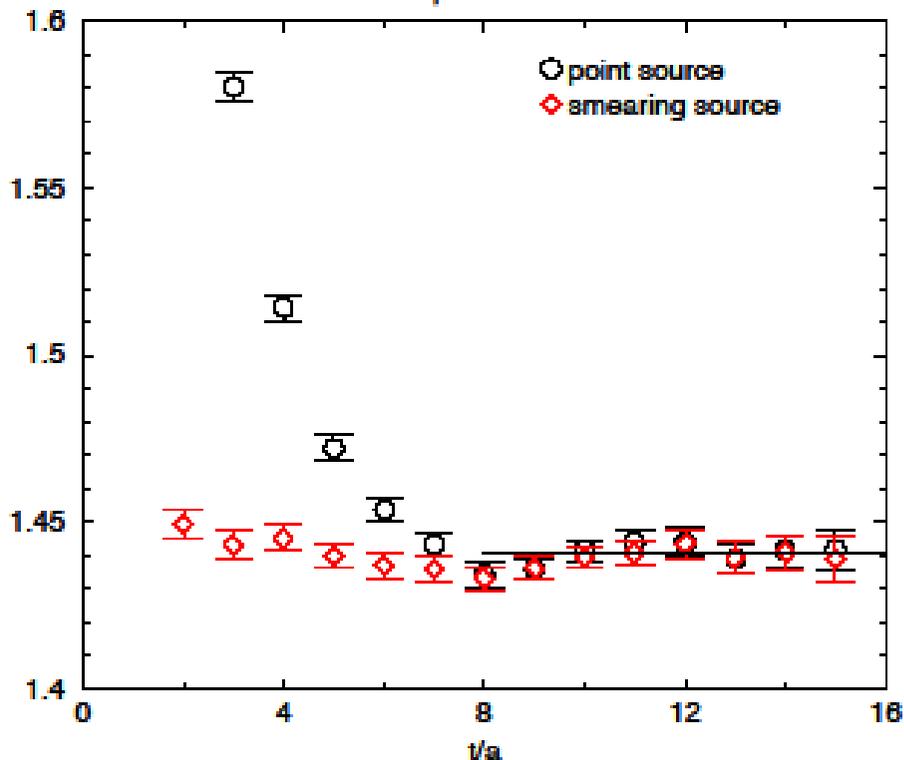
$$m(t) = -\log \frac{G(t+1)}{G(t)} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} m_0$$

もし  $n=0$  以外の励起状態の寄与が無視できれば、 $m(t)$  はある  $t$  以上では定数になる。 ( $t \geq t_{\min}$ )

⇒  $t_{\min} \leq t \leq t_{\max}$  がフィットする範囲

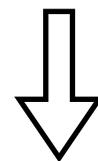
$m(t)a$  vs.  $t/a$

$\rho$  meson



**Smearing:** クォークを 1 点に置くのではなく、空間的に広げることで、励起状態の寄与を減らすことが可能 (経験則)。小さな  $t$  でフィットできるので誤差が小さい。

$$D_{xy}\phi_y = \delta_{t,t_0} \delta_{\vec{x},\vec{x}_0} \quad \text{point source}$$



$$D_{xy}\phi_y = \delta_{t,t_0} A e^{-B|\vec{x}-\vec{x}_0|},$$

smearred source

## 11-2. 誤差評価とフィット

統計誤差

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathcal{O}_i, \quad \delta \langle \mathcal{O} \rangle = \sqrt{\frac{\langle \mathcal{O}^2 \rangle - \langle \mathcal{O} \rangle^2}{N-1}}$$

統計平均

統計誤差

これはデータが独立なら正しい。しかし、独立性を確かめるのは難しい。また、複雑な物理量（質量もその1つ）の誤差の評価には、誤差の伝搬公式を使うが、その場合は、誤差を過大評価してしまうことがある。このような時、どうするか？

ジャックナイフ法

ビンサイズ1

$$\bar{\mathcal{O}}_i = \frac{1}{N-1} \sum_{i \neq k} \mathcal{O}_i$$

1つ除いた平均  
(N通りある)

$f(X)$  物理量  $X$  の勝手な関数に対して

$$\langle f(\mathcal{O}) \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(\bar{\mathcal{O}}_i), \quad \delta \langle f(\mathcal{O}) \rangle = \sqrt{N-1} \sqrt{\langle f^2(\mathcal{O}) \rangle - \langle f(\mathcal{O}) \rangle^2}$$

同じデータをN-1回使っているので。

利点

1. どんな物理量でも統計誤差が計算できる
2. データ間の相関も取り入れられる。（後述）
3. ビンサイズを増やすことで自己相関も評価できる。（次の頁）

# ジャックナイフ法

ビンサイズ  $n$

$$(b = (i_1, i_2, \dots, i_n))$$

ビンの数

$$N_b = N/n$$

$$\bar{\mathcal{O}}_b = \frac{1}{N - n} \sum_{k \notin b} \mathcal{O}_k$$

ビン  $b$  を除いた平均

$$\langle f(\mathcal{O}) \rangle = \frac{1}{N_b} \sum_{b=1}^{N_b} f(\bar{\mathcal{O}}_b), \quad \delta \langle f(\mathcal{O}) \rangle = \sqrt{N_b - 1} \sqrt{\langle f^2(\mathcal{O}) \rangle - \langle f(\mathcal{O}) \rangle^2}$$

# フィット

## フィット関数

$$(g(x_i), \delta g(x_i)) \quad (i = 1, 2, \dots, K)$$

データ

統計誤差

$$f(x, c), \quad c = \{c_j\}_{j=1,2,\dots,n}$$

フィットパラメタ

## $\chi^2$ 乗フィット

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^K \frac{(f(x_i, c) - g(x_i))^2}{\delta g(x_i)^2}$$

が最小になるようにパラメタ  $c$  を決める。

パラメタの誤差: change of  $c_j$  within  $\chi^2 - \chi_{\min}^2 \leq 1$  while other  $c_{i \neq j}$  fixed.

良いフィット:  $\chi^2 \simeq K - n =$  自由度の数

しかしながら、データ間に相関があると正しい誤差評価ができない。  $g(x_i) \leftrightarrow g(x_j) \quad (i \neq j)$

この場合は相関のあるフィットが前述のジャックナイフ法 (ビンサイズ  $n$ ) を使う。



$$\chi^2 = \sum_{i,j} \{f(x_i, c) - g(x_i)\} C_{ij}^{-1} \{f(x_j, c) - g(x_j)\}$$

$$C_{ij} = \frac{1}{N-1} \{ \langle G_i G_j \rangle - \langle G_i \rangle \langle G_j \rangle \} \quad \text{with } g(x_i) \equiv \langle G_i \rangle$$

correlation matrix

If no correlation  $\Rightarrow C_{ij} = \delta_{ij} \delta g(x_i)^2$

## 自己相関

Data  $\{\mathcal{O}_i\}$  on  $N$  configurations ( $i = 1, 2, \dots, N$ )

$$A(t) = \left\{ \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N-t} \mathcal{O}_i \mathcal{O}_{i+t} \right\} - \langle \mathcal{O} \rangle^2$$

$$C(t) \equiv \frac{A(t)}{A(0)} \simeq e^{-t/\tau} \quad \text{自己相関時間}\tau\text{は、平衡に達するまでのモンテカルロのステップ数の目安を与える}$$

積分された自己相関時間

$$\tau_{\text{int}} = \frac{1}{2} + \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N C(i)$$

$\tau_{\text{int}}$  gives Monte-Carlo steps needed to generate independent configurations



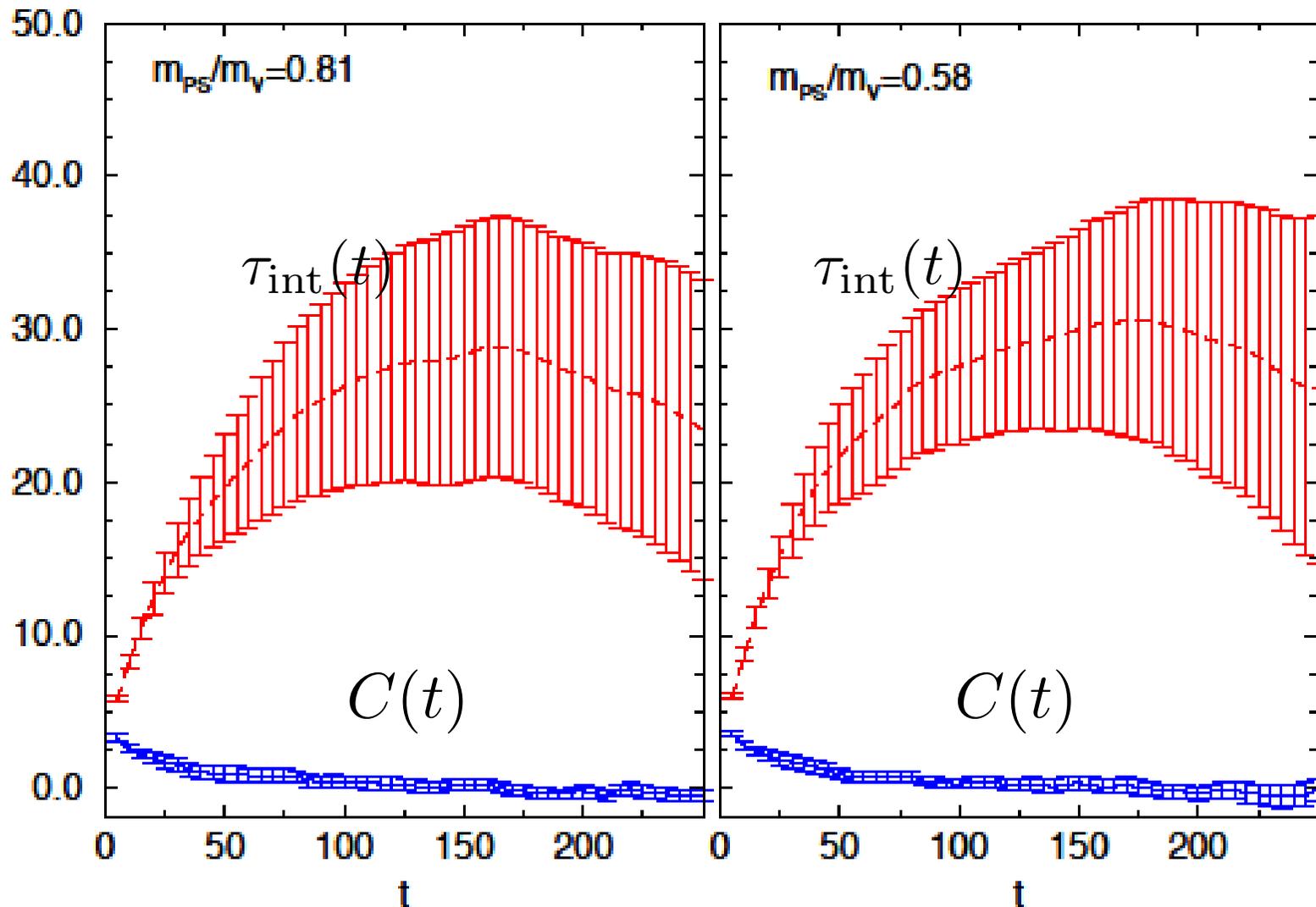
$N/\tau_{\text{int}}$  独立な配位の数

$$\delta \langle \mathcal{O} \rangle = \sqrt{\frac{\langle \mathcal{O}^2 \rangle - \langle \mathcal{O} \rangle^2}{N/\tau_{\text{int}} - 1}} \quad \text{正しい誤差評価}$$

# 例：トポロジカル電荷Qの自己相関関数

— autocorrelation function  
- - -  $\tau_{\text{int}}(t)$

$$\tau_{\text{int}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \tau_{\text{int}}(t)$$

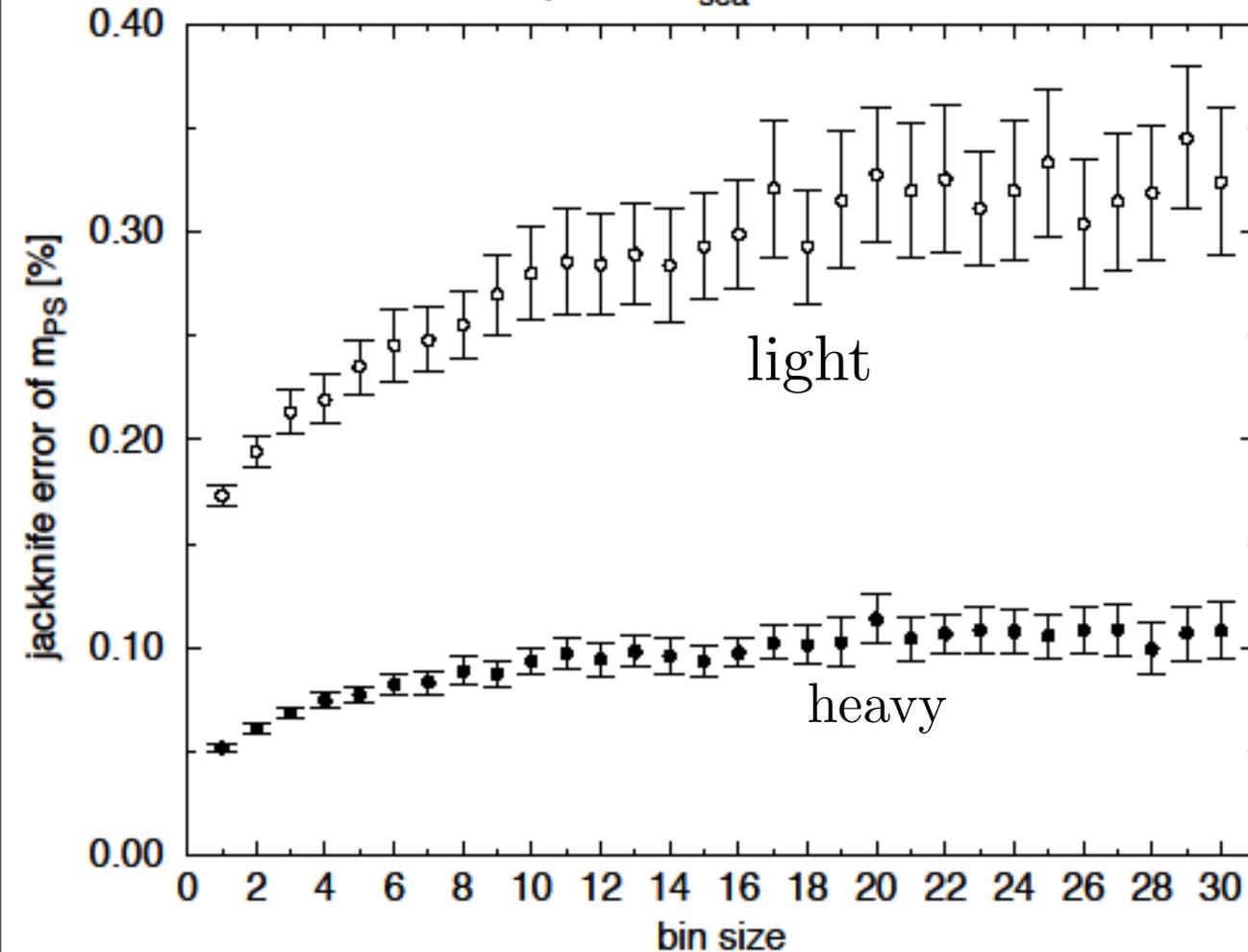


## ジャックナイフ法と自己相関

ジャックナイフ法では、統計誤差は、ビンサイズ  $n$  とともに増加する。

JK error of  $m_\pi$  (%) vs. bin size  $n$

$\beta=2.1$   $K_{\text{sea}}=0.1382$



誤差が一定になる最小の  $n$ :  $n_{\min}$



正しい誤差評価

$$n_{\min} \simeq \tau_{\text{int}}$$

# 11-3. ハドロン質量のクォーク質量依存性

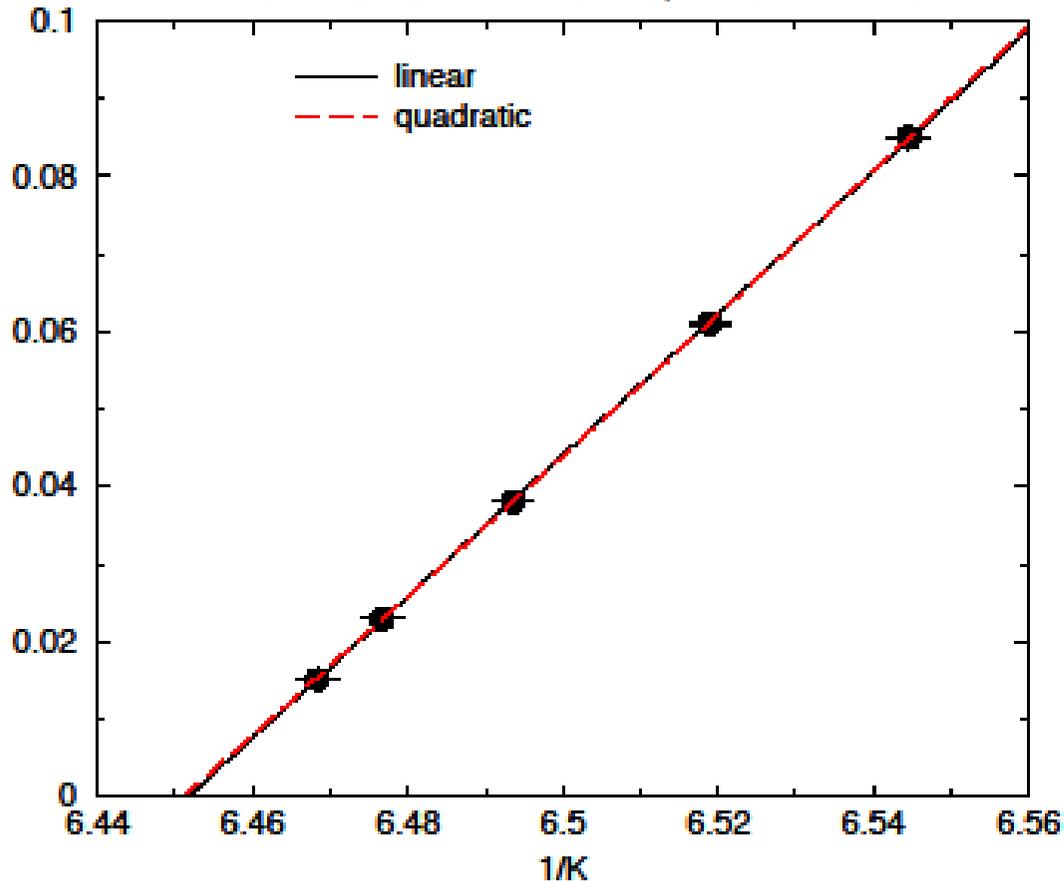
ウィルソン・クォーク作用、クエンチ近似での計算

$\pi$  meson mass

$m_\pi^2$  vs.  $1/K$

$$K = \frac{1}{2m_q a + 8}$$

Plaquette gauge/Wilson quark,  $\beta=6.1$ (Quenched)



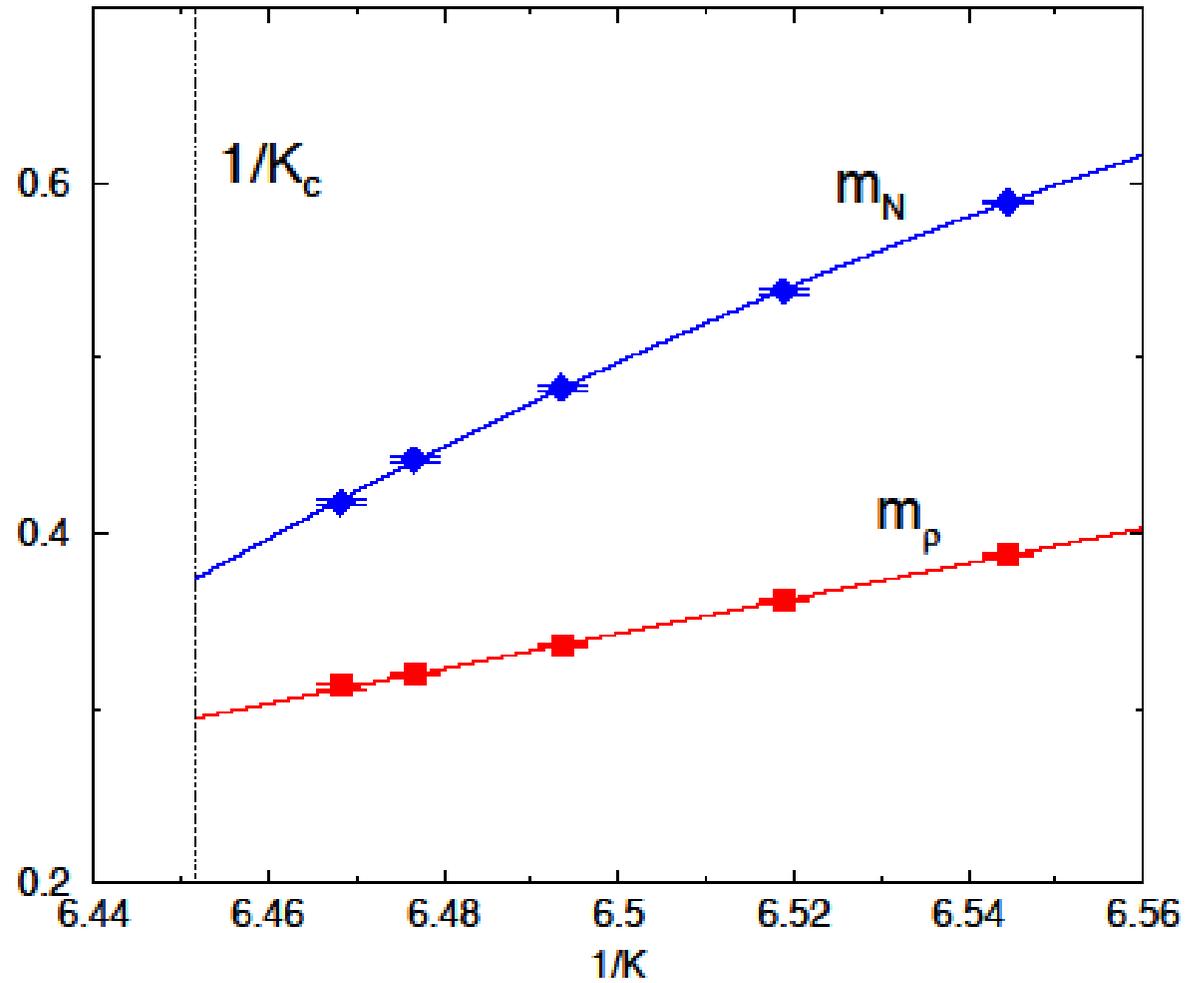
$$m_\pi^2 a^2 = A_\pi \left( \frac{1}{K} - \frac{1}{K_c} \right) + B_\pi \left( \frac{1}{K} - \frac{1}{K_c} \right)^2 + \dots$$

$K_c, A_\pi, B_\pi, \dots$  are fit parameters.

$$2m_q a = \frac{1}{K} - \frac{1}{K_c}$$

$m_\rho, m_N$  vs.  $1/K$

Plaquette gauge/Wilson quark,  $\beta=6.1$  (Quenched)



$$m_\rho a = A_\rho + B_\rho 2m_q + \dots$$

$$m_N a = A_N + B_N 2m_q a + C_N (2m_q)^2 + \dots$$

物理点へのカイラル外挿

particles	order	$A$	$B$	$C$	$K_c$	$\chi^2/\text{d.o.f}$
$\pi$	1	0.911(2)	-	-	0.155001(2)	5.3
$\pi$	2	0.884(10)	0.25(8)	-	0.155015(6)	3.8
$\rho$	1	0.2947(10)	1.00(1)	-	-	1.0
$N$	2	0.374(3)	2.82(12)	-5.39(97)	-	0.9

$$\frac{m_\pi^2}{m_\rho^2} = \frac{135^2}{770^2} = \frac{A_\pi 2m_l a}{(A_\rho + B_\rho 2m_l a)^2} \Rightarrow$$

正しい比を与えるクォーク質量 (格子単位)

$$m_l a = 0.0015$$

格子間隔  $a$  は  $\rho$  中間子の質量の実験値をインプットとして

$$m_\rho a = A_\rho + B_\rho 2m_l a = 0.77(\text{GeV}) \cdot a \Rightarrow a = \frac{A_\rho + B_\rho 2m_l a}{0.77} \text{GeV}^{-1} = 0.387 \text{GeV}^{-1}$$

$\pi$  中間子の質量も自動的に正しく出る。(比が正しいので。)  $(g^2, m_l) \Leftrightarrow (m_\pi, m_\rho)$

予言

$$m_l = 3.88 \text{ MeV} \quad m_N = \frac{A_N + B_N 2m_l a + C_N (2m_l a)^2}{a} = 989 \text{ MeV}$$

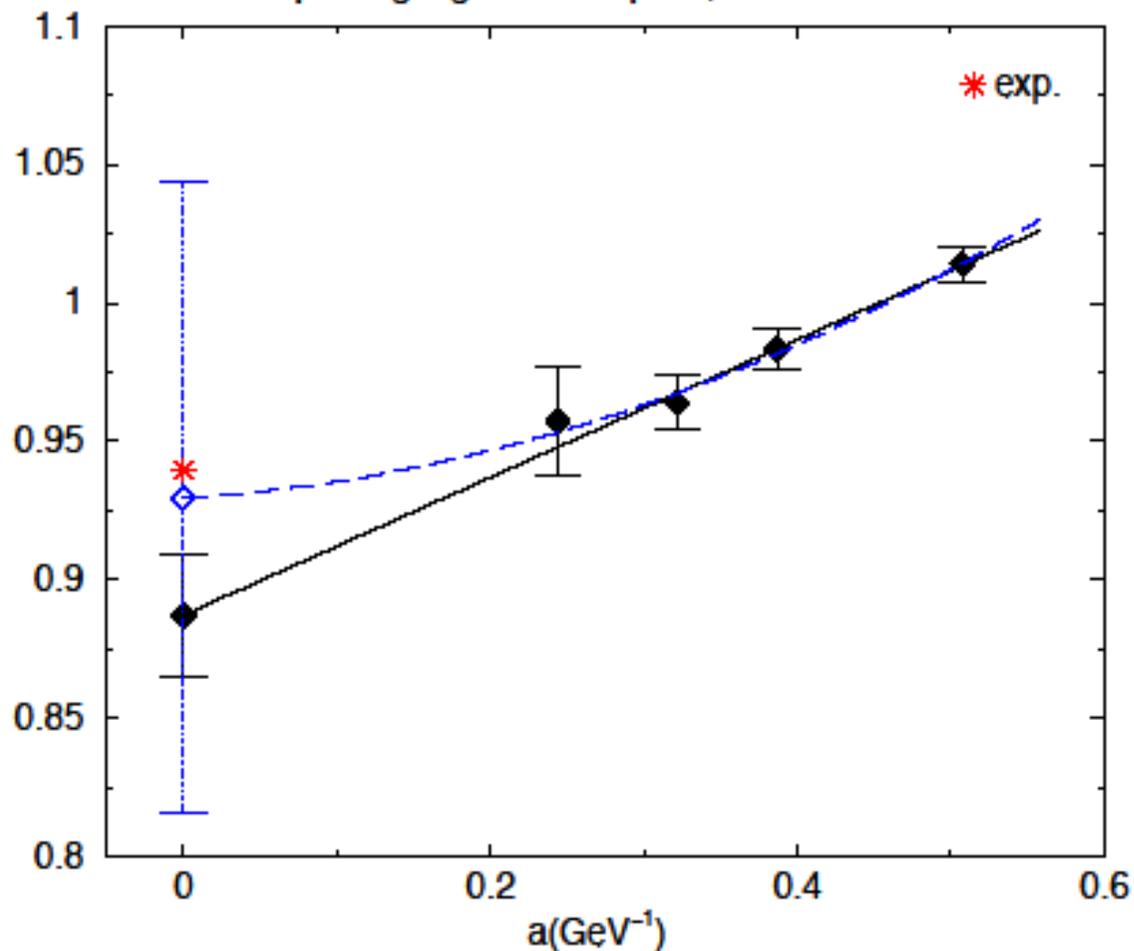
## 11-4. 連続極限

$g$ を変えて同様の計算を繰り返す。

核子の質量

$m_N$  vs.  $a$

Plaquette gauge/Wilson quark, Quenched QCD



Lattice spacing

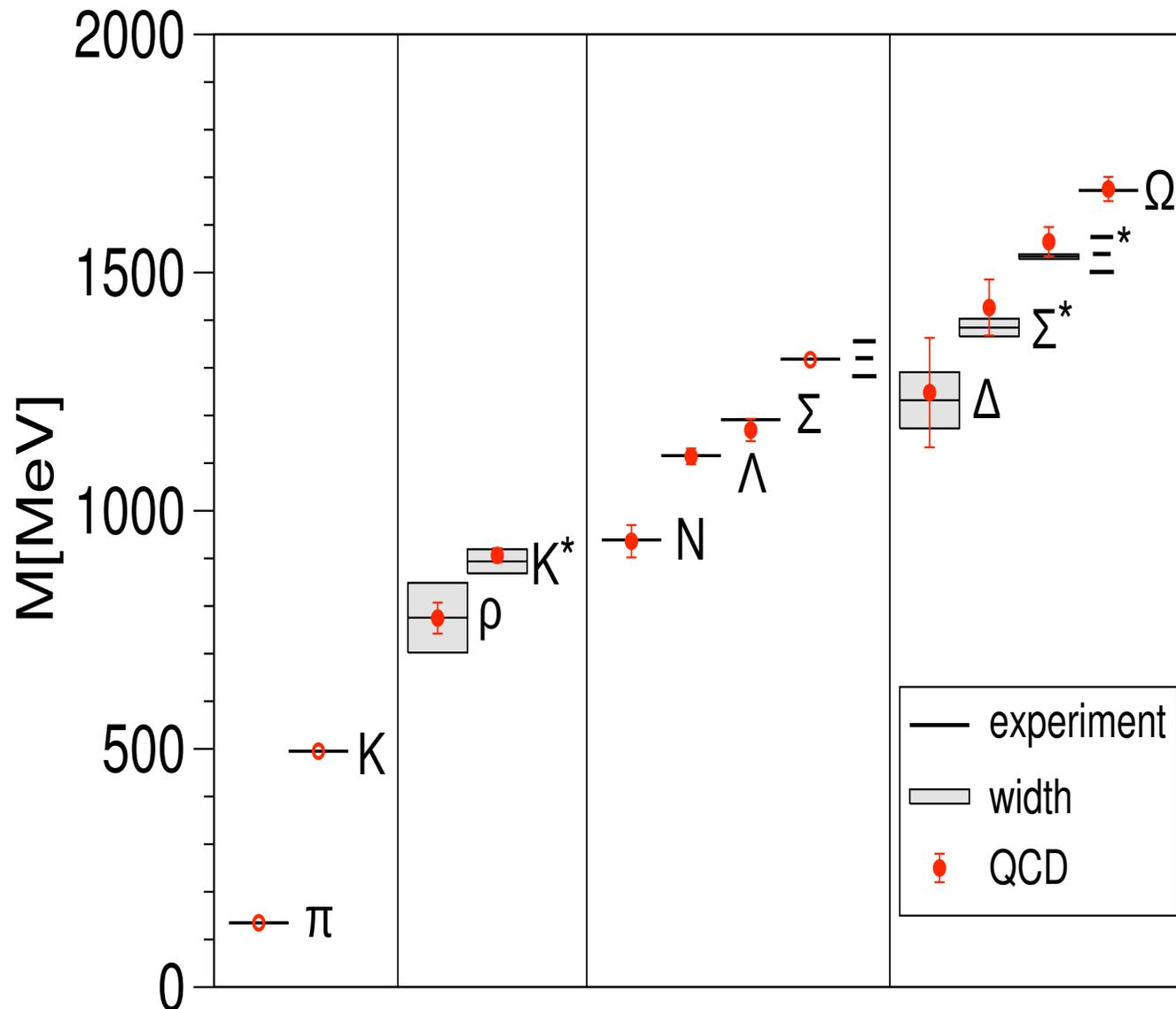
連続極限への外挿

$$m_N(a) = m_N(0) + C_1 a$$

$$m_N(a) = m_N + C_1 a^2 + C_2 a^2$$

# 12. 最新の結果

## 12-1. ハドロンのスペクトラム



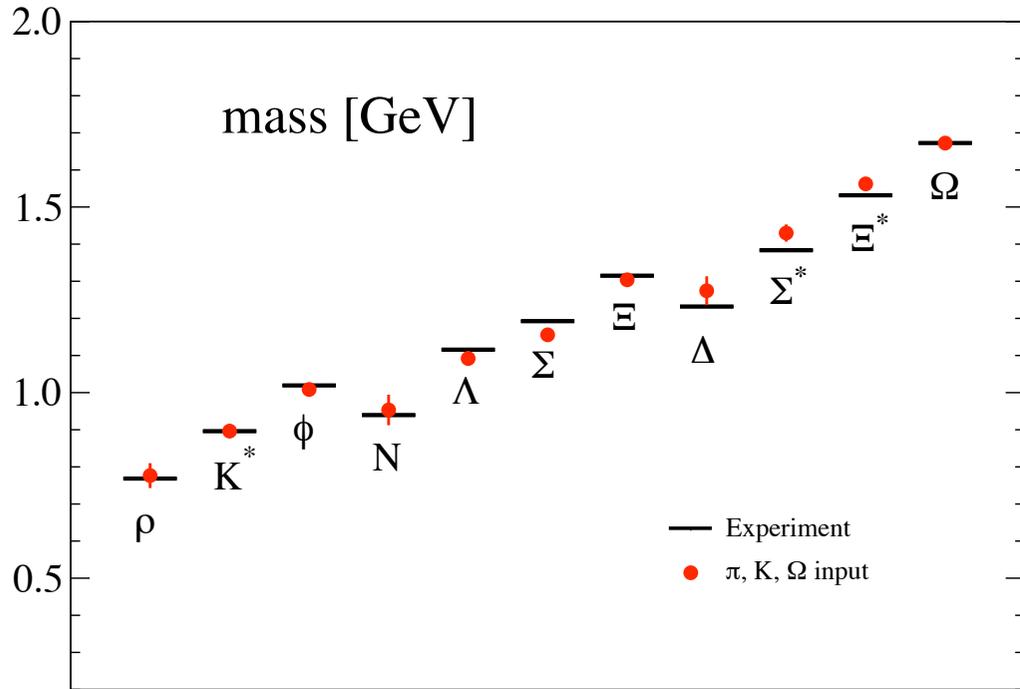
BMW collaboration  
Sciences 322(2008)1224

$$a \rightarrow 0$$

$$m_{\pi}^{\text{min.}} = 190 \text{ MeV}$$

$$m_{\pi} L \geq 4$$

実験と理論 (QCD) の予言は良い精度で一致している！



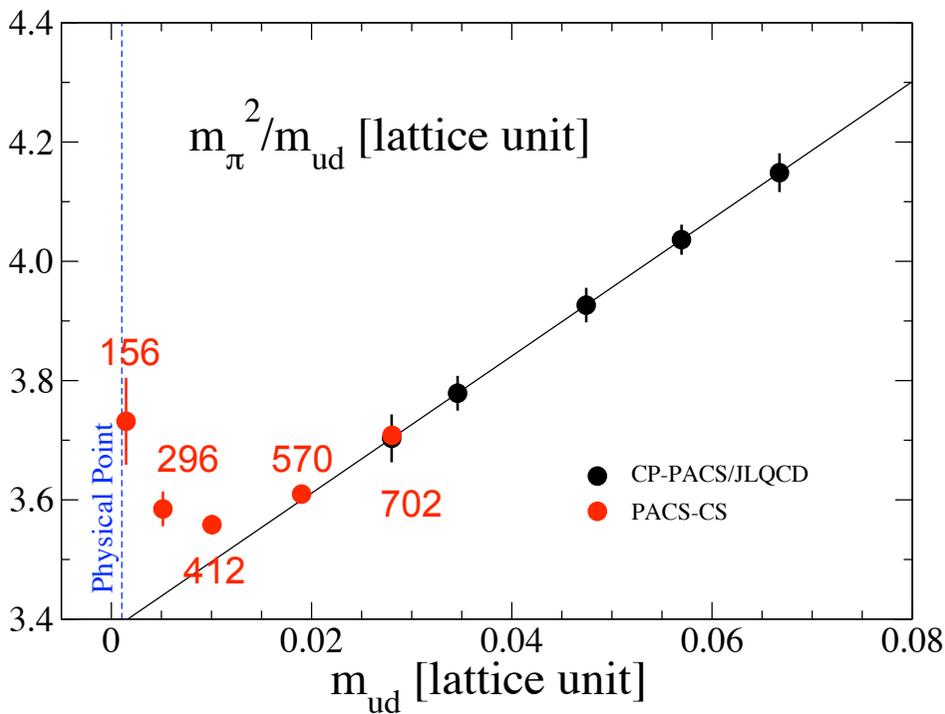
$$a = 0.09 \text{ fm}$$

$$L = 2.9 \text{ fm}$$

$$m_\pi L = 2.3$$

$$m_\pi^{\text{min.}} = 156 \text{ MeV}$$

ほぼ物理点上での計算が可能  
(カイラル外挿不要)



$$m_\pi L > 4$$

現在、大きな体積  $L=5.8 \text{ fm}$  かつ

$m_\pi \simeq 140 \text{ MeV}$  の計算が進行中

“真のQCD計算”

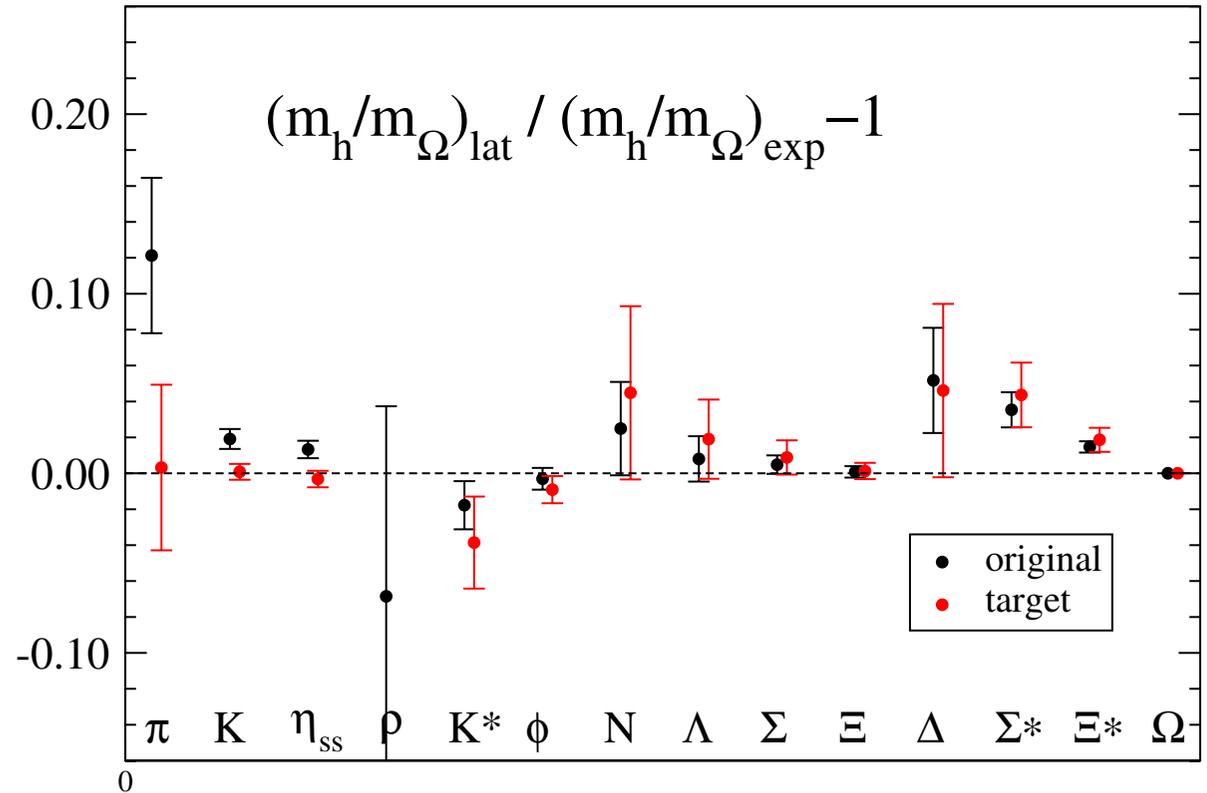
Simulation at  $m_\pi \simeq 140$  MeV by reweighting

$$\begin{aligned} \langle O[U] \rangle_m &= \frac{\int \mathcal{D}U O(U) \det D_m(U) e^{-S_G(U)}}{\int \mathcal{D}U \det D_m(U) e^{-S_G(U)}} = \frac{\int \mathcal{D}U O(U) \frac{\det D_m(U)}{\det D_{m^*}(U)} \det D_{m^*}(U) e^{-S_G(U)}}{\int \mathcal{D}U \frac{\det D_m(U)}{\det D_{m^*}(U)} \det D_{m^*}(U) e^{-S_G(U)}} \\ &= \frac{\langle R_{m/m^*}(U) O(U) \rangle_{m^*}}{\langle R_{m/m^*}(U) \rangle_{m^*}} \end{aligned}$$

hadron spectra

$$R_{m/m^*}(U) = \frac{\det D_m(U)}{\det D_{m^*}(U)}$$

クォーク質量の小さなズレを補正



## 12-2. カイラル摂動論(ChPT)を使ったカイラル外挿

ChPT formula for 2-flavors

Next to Leading Order(NLO)

$$m_\pi^2 = 2Bm_q \left[ 1 + \frac{m_q}{16\pi^2} \ln m_q + c m_q \right] + \dots$$

Leading

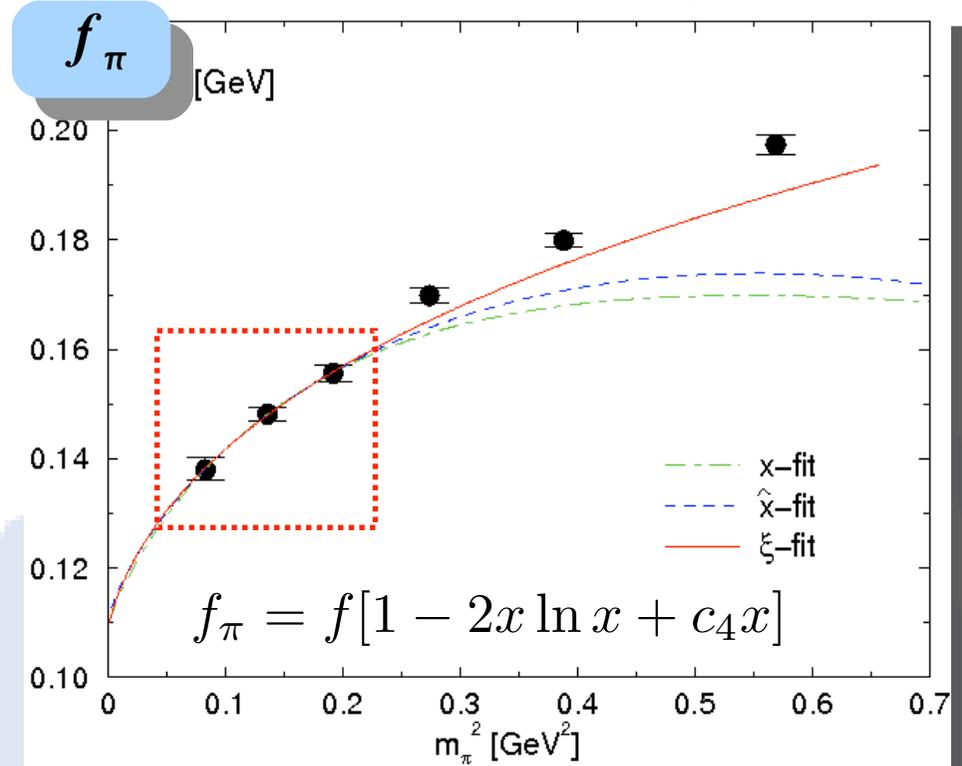
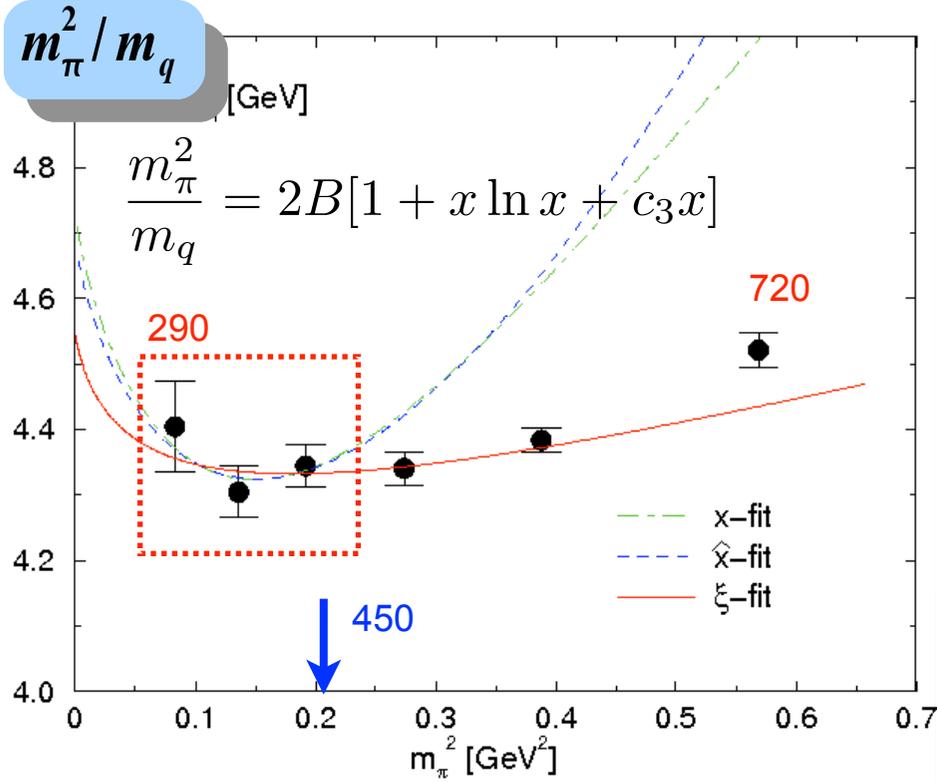
Chiral log

Polynomial

$$f_\pi = f \left[ 1 - \frac{m_q}{8\pi^2} \ln m_q + d m_q \right] + \dots$$

NLO

Overlap, Nf=2

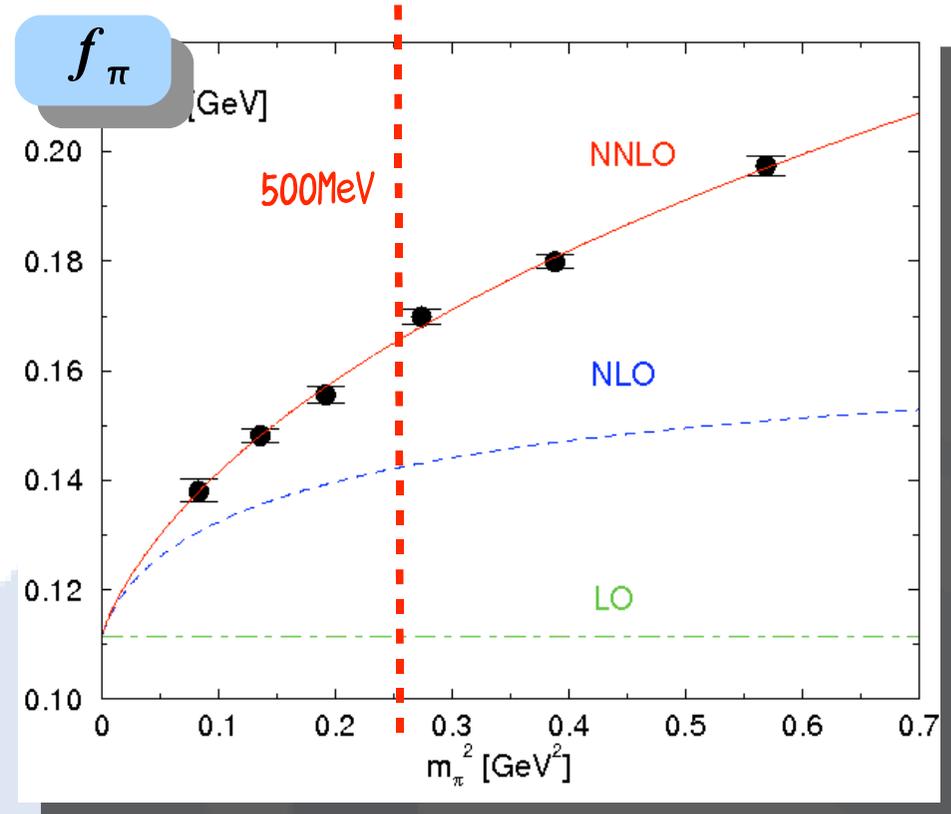
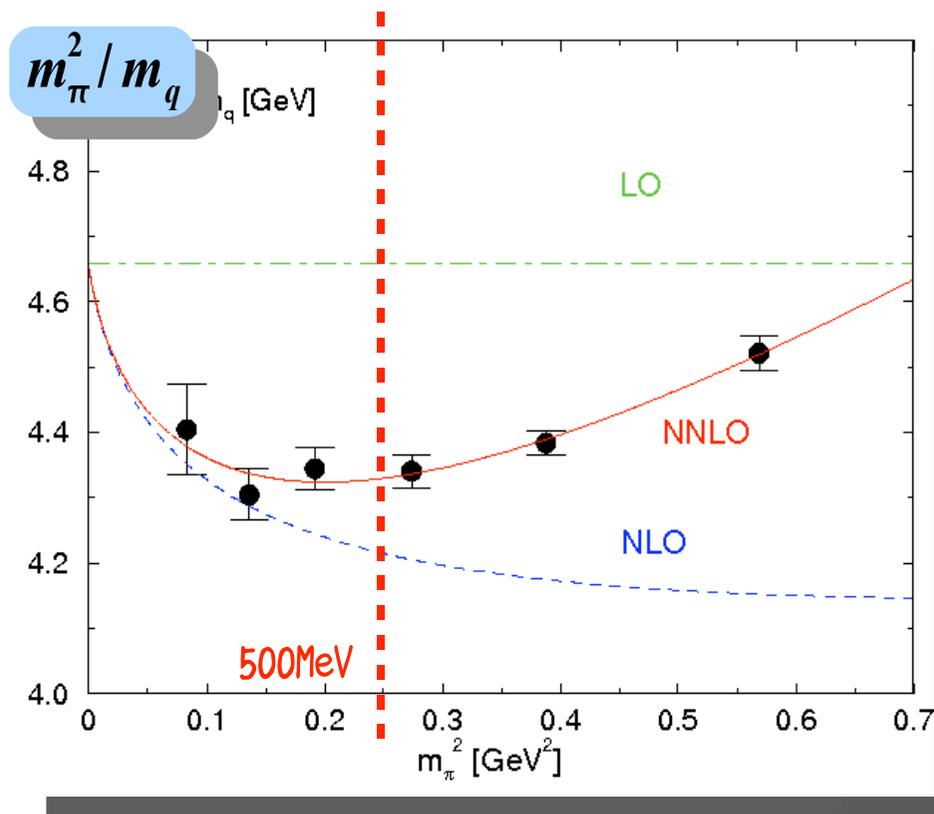


$$x \equiv \frac{m_q}{(4\pi f)^2} \quad \hat{x} \equiv \frac{m_\pi^2}{(4\pi f)^2} \quad \xi \equiv \frac{m_\pi^2}{(4\pi f_\pi)^2}$$

- 軽い3点に対しては、NLO でうまくいく。
- Xi-fit はフィット範囲を超えてデータの振る舞いを記述。

# NNLO Fits using all data points

$$\chi^2/\text{dof} = 1.4$$



$$\frac{|\text{NNLO} - \text{NLO}|}{|\text{NLO} - \text{LO}|} = 0.3 \text{ or } 0.7 \text{ at } m_\pi = 500 \text{ MeV}$$

## コメント

最近では、基本的な物理量に対してはChPTを使うのが”標準”になっている。しかしながら、ChPTが適用できるのかを示さずに闇雲の使い、「理論的にこれを使うのが正しいのだからいいはずだ」という態度は問題。特に、ChPTを使って、計算結果と実験値を合う方向に解析を誘導することはすべきでない。カイラル外挿は難しいが、今後の”物理点での計算”との比較が重要になってくる。

物理量の予言には”物理点での計算”が重要になってくる。

ChPTの未定定数の決定などには、クォーク質量依存性の評価が重要。